Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SLA–340

B.A./B.Sc. Part–III (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - II

(Analysis)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks :* ***66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define limit of a complex function.

सम्मिश्र फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Differentiability.

अवकलनीयता को परिभाषित कीजिए।

(iii) Sufficient conditions for $f(z)$ to be analytic.

फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने का पर्याप्त प्रतिबंध।

(iv) Define Harmonic function.

प्रसंवादी फलन को परिभाषित कीजिए।

(v) Write short note on Conformal mapping.

अनुकोण प्रतिचित्रण पर एक लघु नोट लिखिए।

(vi) State Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय का कथन लिखिए।

(vii) Define distance between two sets.

दो समुच्चयों के मध्य दूरी परिभाषित कीजिए।

(viii) Define open sphere or open ball.

विवृत गोलक को परिभाषित कीजिए।

(ix) Define closed sphere or closed ball.

संवृत गोले को परिभाषित कीजिए।

(x) Define derived set.

व्युत्पन्न समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Let (X, d) be a metric space and let :

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

then (X, d^*) is also a metric space.

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है एवं

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

तब (X, d^*) भी दूरीक समष्टि होगी।

Or

(अथवा)

Let A and B be two bounded sets in a metric space (X, d), then A $\cup$ B is also bounded in (X, d).

माना कि A तथा B एक दूरीक समष्टि [X, d] के दो परिबद्ध समुच्चय हैं, तब A $\cup$ B भी (X, d) में परिबद्ध होगा।

3. Show that (R, d) and (R, d^*) are metric spaces.

सिद्ध कीजिए कि (R, d) एवं (R, d^*) दूरीक समष्टियाँ हैं।

Or

(अथवा)

Prove that :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

is a metric in R.

सिद्ध कीजिए कि :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

R में एक दूरीक है।

4. In a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

एक दूरीक समष्टि में विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

Or

(अथवा)

If (X, *d*) be a metric space, then prove that a subset A of X is closed iff complement of A *i.e.* A′ = X – A is open in X.

यदि (X, *d*) एक दूरीक समष्टि है तो सिद्ध कीजिए कि X का उपसमुच्चय A तभी और तभी X में संवृत होता है जबकि A का पूरक समुच्चय A′ = X – A, X में विवृत समुच्चय हो।

5. Let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ be defined in a domain D. Then $f(z)$ is analytic in D if $u(x, y)$ and $v(x, y)$ have continuous partial derivatives and satisfy Cauchy-Riemann equation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ and } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

and all points of the domains D.

मान लो $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ प्रान्त D में परिभाषित है। तब फलन $f(z)$ प्रान्त D में विश्लेषिक फलन होता है यदि $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलज प्रान्त D के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है तथा कॉशी–रीमान समीकरण :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ तथा } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

प्रान्त D के प्रत्येक बिन्दु पर सन्तुष्ट होती है।

Or

(अथवा)

Polar form of Cauchy-Riemann equation.

कॉशी–रीमान समीकरणों का ध्रुवी रूप।

6. Let $f(z)$ be an analytic function of z in a region D of the z-plane and let $f'(z) \neq 0$ in D. Then the mapping $w = f(z)$ is conformal at all points of D.

माना $f(z)$, z का एक विश्लेषिक फलन z-समतल के प्रदेश D में है तथा यह माना कि D में $f'(z) \neq 0$, तब प्रतिचित्रण $w = f(z)$ प्रदेश D के प्रत्येक बिन्दु पर अनुकोण है।

Or

(अथवा)

Prove that the transformation $w = \frac{5-4z}{4z-2}$, transforms the circle $|z| = 1$, into a circle of radius unity in the w-plane.

सिद्ध कीजिए रूपान्तरण $w = \frac{5-4z}{4z-2}$, वृत्त $|z| = 1$ को w-समतल में इकाई त्रिज्या के वृत्त में रूपान्तरित करता है।

Section–C

(खण्ड–स)

7. A subset of a metric space is open iff it is the union of a family of a open spheres.

   किसी दूरीक समष्टि का एक उपसमुच्चय विवृत है यदि और केवल यदि यह विवृत गोलकों में संग्रह का संघ है।

8. In any metric space the limit of a sequence is unique if it exists.

   किसी दूरीक समष्टि में एक अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है, यदि यह विधमान है।

9. Every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence but its converse is not necessarily true.

   दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कॉशी अनुक्रम होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

10. If $f(z)$ and $g(z)$ are differentiable functions, then prove that :

    (i) $\frac{d}{dz}\{kf(z)\} = k\frac{d}{dz}\{f(z)\}$, where k is constant.

    (ii) $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z)$

    (iii) $\frac{d}{dz}\{f(z)\cdot g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$

    (iv) $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{\{g(z)\}^2}, \quad g(z) \neq 0$

यदि $f(z)$ तथा $g(z)$ अवकलनीय फलन हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\frac{d}{dz}\{kf(z)\} = k\frac{d}{dz}\{f(z)\}$, जहाँ k अचर है।

(ii) $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z)$

(iii) $\frac{d}{dz}\{f(z)\cdot g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$

(iv) $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{\{g(z)\}^2}, \quad g(z) \neq 0$

11. If $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is analytic function in domain D, then $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are harmonic function in D.

यदि प्रान्त D में $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ एक विश्लेषिक फलन हो, तब $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ प्रान्त D में प्रसंवादी फलन है।