

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 7

SLA-315

B.A./B.Sc. Part-III (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

(Advance Algebra)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-74

(1)

SLA-315 P.T.O.

Section-A

(खण्ड-अ)

1. (i) Define Ring with zero divisor.
शून्य भाजक सहित वलय को परिभाषित कीजिए।
- (ii) What is characteristic of an integral domain and field ? Give examples.
पूर्णांकीय प्रान्त तथा क्षेत्र का अभिलक्षण क्या होता है ? उदाहरण सहित बताइए।
- (iii) Write necessary and sufficient condition for a non-empty subset K of a field F to be a subfield.
क्षेत्र F के अरिक्त उपसमुच्चय K का उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।
- (iv) Define Prime Field.
अभाज्य क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Ring Homomorphism.
वलय समाकारिता को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Left Ideal.
वाम गुणजावली को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Find all the principal ideals of the ring $[\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6, \cdot_6]$.
वलय $[\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, +_6, \cdot_6]$ की सभी मुख्य गुणजावली ज्ञात कीजिए।
- (viii) What is vector subspace ?
सदिश उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (ix) What is linear transformation ?
रैखिक रूपान्तरण को परिभाषित कीजिए।
- (x) Define Minimal polynomial.
अल्पिष्ठ बहुपद परिभाषित कीजिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

2. If $\langle R, +, \cdot \rangle$ is a ring, then prove that $a, b \in R$:

(i) $a * 0 = 0 * a = 0$

(ii) $a * (-b) = -(a * b) = (-a) * b$

यदि $\langle R, +, \cdot \rangle$ एक वलय है जिसमें $a, b \in R$ है तो सिद्ध कीजिए :

(i) $a * 0 = 0 * a = 0$

(ii) $a * (-b) = -(a * b) = (-a) * b$

Or

(अथवा)

Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field.

सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजकों से रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

3. Prove that the set $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ is a commutative ring for addition modulo $5(+_5)$ and multiplication modulo $5(\cdot_5)$. Is it an integral domain ?

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ योग मोड्यूलो $5(+_5)$ और गुणन मोड्यूलो $5(\cdot_5)$ के लिए एक क्रमविनिमेय वलय है ? क्या यह एक पूर्णाकीय प्रान्त है ?

Or

(अथवा)

Prove that the intersection of two subrings is also a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

4. Prove that all the eigenvalues of a Hermitian matrix are real.

सिद्ध कीजिए कि एक हर्मिशियन मैट्रिक्स के सभी आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

Or

(अथवा)

Find the minimal polynomial for the matrix :

निम्न मैट्रिक्स का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

5. If the mapping $f: V(F) \rightarrow V'(F)$ is one-one onto linear mapping, then show that $f^{-1}: V'(F) \rightarrow V(F)$ will also be linear mapping.

यदि प्रतिचित्रण $f: V(F) \rightarrow V'(F)$ एकैकी आच्छादक रैखिक प्रतिचित्रण हो, तो सिद्ध कीजिए कि $f^{-1}: V'(F) \rightarrow V(F)$ भी रैखिक प्रतिचित्रण होगा।

Or

(अथवा)

If $V(\mathbb{R})$ is the vector space of all complex number $a + ib$ over the field of real \mathbb{R} and let f be a mapping from $V(\mathbb{R})$ to $V_2(\mathbb{R})$ defined as $f(a + ib) = a + b$, prove that f is an isomorphism.

यदि $V(\mathbb{R})$ वास्तविक संख्याओं \mathbb{R} पर समस्त सम्मिश्र संख्याओं $a + ib$ का सदिश समष्टि हो तथा प्रतिचित्रण $f: V(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$, जहाँ $f(a + ib) = a + b$, तो सिद्ध कीजिए कि f -एकैक समाकारिता है।

6. For which value of k will the vector $u = (5, k, 7) \in V_3(\mathbb{R})$ is a linear combination of vectors $u_1 = (1, -5, 3)$ and $u_2 = (3, 2, 1)$.

k के किसी मान के लिए $u = (5, k, 7) \in V_3(\mathbb{R})$, $u_1 = (1, -5, 3)$ तथा $u_2 = (3, 2, 1)$ सदिशों का एकघाततः संचय होगा।

Or

(अथवा)

Is the vector $u = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ in a vector space of 2×2 matrix, a linear combination

of $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ and $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

If yes, then find linear combination.

क्या 2×2 मैट्रिक्स सदिश समष्टि में सदिश $u = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ निम्न सदिशों का एकघाततः संचय है :

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ एवं $u_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

यदि हाँ, तो एकघात संचय ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. If $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$, $g(x) = 3 - 5x - 8x^3$ be two polynomials over a ring Z of integers, then find :

(i) $f(x) + g(x)$

(ii) $f(x) \cdot g(x)$

यदि पूर्णाकों के वलय Z पर बहुपद $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$, $g(x) = 3 - 5x - 8x^3$ हो, तो :

(i) $f(x) + g(x)$

(ii) $f(x) \cdot g(x)$

के मान ज्ञात कीजिए।

8. Prove that the matrix set $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ is a vector space over the field

\mathbb{R} of real numbers with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication.

सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स समुच्चय $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स, अदिश गुणन

के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र \mathbb{R} पर एक सदिश समष्टि है।

9. (a) If R be a ring and $a \in R$, then show that the normalizer of a in R
 $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ is a subring R .

यदि a किसी वलय R का एक अवयव है, तो सिद्ध कीजिए कि R में a का प्रसामान्यक
 $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ R एक उपवलय है।

(b) Show that the set $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ is a subfield of \mathbb{R} .

दर्शाइए कि समुच्चय $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ \mathbb{R} का एक उपक्षेत्र है।

10. Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix :

निम्न मैट्रिक्स के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

11. If $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ be the set of all ordered pairs of real numbers. Prove that $\langle S, \oplus, \odot \rangle$ is a commutative ring with unity and with zero divisors, where \oplus and \odot in S are defined as :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in S$$

यदि $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि $\langle S, \oplus, \odot \rangle$ शून्य भाजक सहित एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है, जहाँ \oplus और \odot , S में निम्नानुसार परिभाषित हैं :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in S$$