Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SLA–240

B.A./B.Sc. Part–III Due of Part–II (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) What is the condition of equilibrium of a rigid body under three forces ?

   तीन बलों के अन्तर्गत एक पिण्ड की साम्यावस्था की क्या शर्त है ?

   (ii) Define friction and force of friction.

   घर्षण एवं घर्षण बल को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Prove for catenary :

   कैटिनरी के लिए सिद्ध कीजिए :

$$y^2 = c^2 + s^2$$

   (iv) What do you mean by Null lines ?

   शून्य आघूर्ण रेखाओं से क्या तात्पर्य है ?

   (v) Define tangential and normal velocities.

   स्पर्शरिखीय तथा अभिलाम्बिक वेग को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define time period of S.H.M.

   सरल आवर्त गति के आवर्तकाल को परिभाषित कीजिए।

   (vii) State inverse-square law.

   व्युत्क्रम वर्ग नियम का कथन लिखिए।

   (viii) What do you mean by Modulus of Elasticity ?

   प्रत्यास्थता मापांक से आपका क्या अभिप्राय है ?

   (ix) Write energy equation for circular motion.

   वर्तुल गति के लिए ऊर्जा समीकरण लिखिए।

   (x) Define direct impact.

   समक्ष संघट्ट को परिभाषित कीजिए।

(xi) Write pedal equation of central orbit.

संकेन्द्रीय कक्ष का पादिक समीकरण लिखिए।

(xii) Explain velocity for infinity.

अनन्त से वेग की व्याख्या कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. A heavy carriage wheel of weight W and radius r is to be dragged over an obstacle of height h, by a horizontal force F applied to the centre of wheel. Show that F must be slightly greater than $W(2hr - h^2)^{1/2}/(r - h)$.

एक गाड़ी का पहिया जिसका भार W और त्रिज्या r है, एक h ऊँचाई की रुकावट के ऊपर उसके केन्द्र पर क्षैतिज दिशा में बल लगाकर खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि बल $W(2hr - h^2)^{1/2}/(r - h)$ से थोड़ा अधिक होना चाहिए।

Or

(अथवा)

A uniform ladder of length l and weight W, rests with its foot on the rough ground and its upper end against a smooth wall, the inclination to the vertical being α. A force P is applied horizontally to the ladder at a point distant c from the foot so as to make the foot approach the wall. Prove that P must exceed $\dfrac{lW\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\alpha\right)}{(l-c)}$, where μ is the coefficient of friction at the foot.

l लम्बाई और W भार की एक एकसमान सीढ़ी का पाद किसी रुक्ष क्षैतिज भूमि पर और ऊपर वाला सिरा किसी चिकनी दीवार के सहारे स्थित है, सीढ़ी का ऊर्ध्वाधर से झुकाव α है। पाद से c दूरी पर स्थित बिन्दु पर कोई क्षैतिज बल P से सीढ़ी को दीवार की ओर खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि P का मान $\dfrac{lW\left(\mu + \frac{1}{2}\tan\alpha\right)}{(l-c)}$ से अधिक होना चाहिए, जहाँ μ पाद पर घर्षण गुणांक है।

3. Four equal rods, each of length a, are joined to form a rhombus ABCD and angles B and D are jointed by a string of length l. The system is placed in a vertical plane with A resting on a horizontal plane and AC vertical. Prove that the tension of the string is $\frac{2wl}{\sqrt{(4a^2 - l^2)}}$, where w is the weight of each rod.

a लम्बाई की चार समान दण्डों को जोड़कर एक समचतुर्भुज ABCD बनाया जाता है और B तथा D को l लम्बाई की एक डोरी द्वारा जोड़ा जाता है। निकाय को इस प्रकार एक ऊर्ध्वाधर समतल में रखा जाता है कि A क्षैतिज समतल पर रहे तथा AC ऊर्ध्वाधर रहे। सिद्ध कीजिए कि डोरी का तनाव $\frac{2wl}{\sqrt{(4a^2 - l^2)}}$ है, जहाँ w प्रत्येक दण्ड का भार है।

Or

(अथवा)

A uniform chain of length l, which can just bear a tension of n times its weight, is suspended between two points at the same horizontal level. Show that the least possible sag in the middle is $l\left\{n - \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right\}$.

l लम्बाई की एकसमान जंजीर एक क्षैतिज रेखा के दो बिन्दुओं के मध्य लटकाई गई है जो अपने भार के n गुने तनाव को सहन कर सकती है। प्रदर्शित कीजिए कि इसके मध्य में न्यूनतम झोल $l\left\{n - \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right\}$ है।

4. A moving particle P possesses two constant velocities u and v, the first of which is in a fixed direction and the other is perpendicular to the radius vector OP drawn from a fixed point O. Prove that the path of the particle is a conic section whose focus is O and whose eccentricity is $\frac{u}{v}$.

किसी गतिमान कण P के दो अचर वेग u और v हैं, प्रथम वेग किसी स्थिर दिशा में है और दूसरा वेग किसी स्थिर बिन्दु O से खींची गई ध्रुवान्तर रेखा OP के लम्बवत् दिशा में है। सिद्ध कीजिए कि कण का पथ एक शंकु परिच्छेद है जिसकी नाभि O तथा उत्केन्द्रता $\frac{u}{v}$ है।

Or

(अथवा)

A particle moves in a straight line under an attractive force varying as (distance)$^{-4/3}$. Show that the velocity falling from rest at infinity at a distance a is equal to that acquired in falling from rest at a distance a to a distance $\frac{a}{8}$.

एक कण एक सरल रेखा पर स्थित किसी स्थिर बिन्दु की ओर (दूरी)$^{-4/3}$ के अनुपाती किसी आकर्षी बल के अधीन सरल रेखा में चलता है। सिद्ध कीजिए कि अनन्त पर विरामावस्था से बल केन्द्र से a दूरी पर गिरने पर प्राप्त वेग, a दूरी से $\frac{a}{8}$ दूरी पर गिरने वाले कण द्वारा प्राप्त वेग के बराबर होगा।

5. A particle of mass m is performing S.H.M. in the line joining two points A and B on a smooth plane and is connected with these points by elastic strings of natural lengths a and a', the modulii of elasticity being λ and λ' respectively. Show that the periodic time is :

$$2n\sqrt{m\left\{\frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda'}{a'}\right\}^{-1}}$$

m द्रव्यमान का एक कण चिकने समतल पर स्थित दो बिन्दुओं A और B को मिलाने वाली रेखा पर सरल आवर्त गति में गतिमान है और वह इन बिन्दुओं से a और a' स्वाभाविक लम्बाई की प्रत्यास्थ डोरियों द्वारा बँधा हुआ है। यदि प्रत्यास्थ मापांक क्रमशः λ तथा λ' हों, तो सिद्ध कीजिए कि आवर्तकाल है :

$$2n\sqrt{m\left\{\frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda'}{a'}\right\}^{-1}}$$

Or

(अथवा)

Discuss the motion of a particle of mass m projected with velocity u along a smooth vertical curve.

m द्रव्यमान के एक कण की गति, जो वेग u से एक चिकने ऊर्ध्वाधर वक्र के अनुदिश फेंका जाता है, की विवेचना कीजिए।

6. A sphere impinges directly on an equal sphere at rest. If the coefficient of restitution be e, show that their velocities after impact are as $(1 - e) : (1 + e)$.

एक गेंद किसी दूसरी समान मात्रा की गेंद से संघट्ट करती है जोकि विरामावस्था में है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो, तो दर्शाइये कि संघट्ट के पश्चात् इन गेंदों का वेग $(1 - e) : (1 + e)$ होगा।

Or

(अथवा)

If v_1 and v_2 are velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के उस समय के वेग हों जब वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम दूरियों पर हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. A rod rests wholly within a smooth hemispherical bowl of radius r, its centre of gravity dividing the rod into two portions a and b. Show that if θ be the inclination of the rod to the horizon in the position of equilibrium, then :

(a) $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{(r^2 - ab)}}$

(b) $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

where rod intersects angle 2α at the center of the sphere.

एक छड़ जिसका गुरुत्व केन्द्र उसे a और b लम्बाई के दो भागों में विभाजित करता है, r त्रिज्या के एक चिकने गोले के अन्दर पूर्णतः रखी हुई है। यदि साम्यावस्था में छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

(अ) $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{(r^2 - ab)}}$

(ब) $\tan\theta = \dfrac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

जहाँ छड़ गोले के केन्द्र पर कोण 2α अंतरित करती है।

8. A force F acts along the axis of x and another force nF along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$, show that the central axis lies on the following cylinder :

एक बल F, x-अक्ष के अनुदिश क्रियाशील है तथा दूसरा बल nF बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ के एक जनक के अनुदिश कार्यरत् है। प्रदर्शित कीजिए कि केन्द्रीय अक्ष निम्न बेलन पर स्थित है :

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2 y^2 = n^4 a^2$$

9. Derive the formula for Tangential and Normal velocities and accelerations.

स्पर्शरेखीय तथा अभिलाम्बिक वेग और त्वरण के सूत्रों को स्थापित कीजिए।

10. One end of a light elastic string of natural length a and modulus $2mg$ is attached to a fixed point O and the other end is tied to a particle of mass m and held at rest at O, is allowed to fall. Find the greatest extension of the string and show that the particle will reach O again after a time :

एक प्रत्यास्थ डोरी की स्वाभाविक लम्बाई a और प्रत्यास्थ मापांक $2mg$ है। इसका एक सिरा बिन्दु O पर बँधा है और दूसरे सिरे से m द्रव्यमान का कण बाँधा गया है। कण को बिन्दु O पर ले जाकर विरामावस्था से गिराया गया। डोरी का उच्चतम विस्तार ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि कण वापस बिन्दु O पर निम्न समय के बाद पहुँचेगा :

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2)\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$$

11. A particle of mass m moves under a central force $m\mu\left(\frac{5}{r^3} + \frac{8c^2}{r^5}\right)$ and is projected from an apse at a distance c with velocity $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$. Prove that the orbit is $r = c\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ and that it will arrive at the origin after a time $\frac{\pi c^2}{8\sqrt{\mu}}$.

संहति का एक कण केन्द्रीय आकर्षी बल $m\mu\left(\frac{5}{r^3} + \frac{8c^2}{r^5}\right)$ के अधीन गतिमान है और इसे c दूरी पर स्थित स्तब्धिका से $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि संकेन्द्र कक्षा $r = c\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ है और यह $\frac{\pi c^2}{8\sqrt{\mu}}$ समय के पश्चात् मूलबिन्दु पर पहुँचता है।