Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SLA–210

B.A./B.Sc. Part–III Due of Part–II (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Write ($\in$ – δ) definition of limit of a function of one variable.

एक चर के फलन की सीमा की ($\in$ – δ) परिभाषा लिखिए।

(ii) Give an example of removable discontinuity.

अपनेय असांतत्यता का एक उदाहरण दीजिए।

(iii) Prove that the function $f(x) = e^x$, $\forall\ x \in$ R is differentiable everywhere.

सिद्ध कीजिए फलन $f(x) = e^x$, $\forall\ x \in$ R में सर्वत्र अवकलनीय है।

(iv) State Cauchy's mean value theorem.

कॉशी मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए।

(v) Define Riemann integral.

रीमान समाकल को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Supremum and Infimum of a sequence.

एक अनुक्रम के उच्चक एवं निम्नक को परिभाषित कीजिए।

(vii) Show that the following series is oscillating :

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी दोलनी है :

$$4 - 4 + 4 - 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(viii) Show that the following series is convergent :

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है :

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots \qquad (p > 0)$$

(ix) Define improper integral of second kind.

द्वितीय प्रकार के अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिए।

(x) Write Euler's formulae to find Fourier coefficients a_n and b_n.

फूरिये गुणांक a_n तथा b_n ज्ञात करने के यूलर सूत्र लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Show that :

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$$

does not exist.

दिखाइए :

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$$

अस्तित्वहीन है।

Or

(अथवा)

Show that the following function is discontinuous at (0, 0) :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

दिखाइए कि निम्न फलन (0, 0) पर असंतत है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3. Examine for differentiability of the function $f(x) = |x - 1|$ at $x = 1$.

फलन $f(x) = |x - 1|$ की $x = 1$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

Or

(अथवा)

Deduce from Cauchy's MV theorem that :

$$f(b)-f(a)=cf'(c)\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

where $f(x)$ is continuous and differentiable in $[a, b]$ and $a < c < b$.

कॉशी मध्यमान प्रमेय से निगमन कीजिए :

$$f(b)-f(a)=cf'(c)\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

जहाँ $f(x)$, $[a, b]$ में संतत तथा अवकलनीय है और $a < c < b$।

4. If f be a real valued bounded function defined on $[a, b]$ and M and m are supremum and infimum of f in $[a, b]$; then :

यदि फलन f, $[a, b]$ पर परिभाषित परिसीमित वास्तविक फलन हो तथा M, m फलन f के $[a, b]$ में क्रमशः उच्चक एवं निम्नक हों तो :

$$m(b-a) \leq L(f, p) \leq U(f, p) \leq M(b-a) \ \forall \ p \in p[a, b]$$

Or

(अथवा)

Prove that every continuous function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R-समाकलनीय होता है।

5. Prove that the sequence $<x_n>$ is convergent and $2 \leq \lim x_n \leq 3$ where :

$$x_n = 1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी है तथा $2 \leq \lim x_n \leq 3$ जहाँ :

$$x_n = 1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}$$

Or

(अथवा)

Examine for convergence the following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}(1+2)+\frac{1}{4^3}(1+2+3)-\frac{1}{5^3}(1+2+3+4)+....$$

6. Prove that the sequence $<f_n>$ where $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ $\forall$ $x \in$ R is bounded but not uniformly bounded.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<f_n>$ जहाँ $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ $\forall$ $x \in$ R एक परिबद्ध अनुक्रम है लेकिन एकसमान परिबद्ध अनुक्रम नहीं है।

Or

(अथवा)

Examine the convergence of the following integral :

निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Using $\in - \delta$ definition of limit, prove that :

सीमा की $\in - \delta$ परिभाषा के प्रयोग से सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+2y)=3$$

(b) Prove that if a function f is continuous in $[a, b]$; then it attains its Supremum and Infimum at least once in $[a, b]$.

सिद्ध कीजिए यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है, तो वह उस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक तथा निम्नक को ग्रहण करता है।

8. (a) Let :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

show that the function f is not differentiable at the origin.

मान लीजिए :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

दिखाइए कि फलन f मूल बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

(b) Is Rolle's theorem applicable for the following function in the interval $[a, b]$? If yes, then verify the theorem :

क्या निम्न फलन के लिए अन्तराल $[a, b]$ में रोल प्रमेय लागू होती है ? यदि हाँ, तो रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x)=\log\left\{\frac{x^2+ab}{x(x+b)}\right\},\quad 0\notin[a,b]$$

9. If f is function defined on $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ as follows :

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x \text{ is rational}\\ \sin x, & x \text{ is irrational}\end{cases}$$

prove that :

$$f\notin R\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

यदि फलन f, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \text{ परिमेय है} \\ \sin x, & x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए :

$$f \notin R\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

10. Show that the following series is convergent if $p > 2$ and divergent if $p \le 2$.

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $p > 2$ एवं अपसारी है यदि $p \le 2$:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^p + \ldots\ldots$$

11. Find Fourier series for the following function :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\pi & \text{for} & -\pi < x < 0 \\ x & \text{for} & 0 < x < \pi \end{bmatrix}$$

Hence deduce that :

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots$$

निम्न फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\pi & \text{for} & -\pi < x < 0 \\ x & \text{for} & 0 < x < \pi \end{bmatrix}$$

फलतः निगमन कीजिए :

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots$$