Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SLA–130

B.A./B.Sc. Part–III Due of Part–I (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Write standard vector equation of ellipse.

   दीर्घवृत्त का मानक सदिश समीकरण लिखिए।

   (ii) Define derivative of a constant vector.

   अचर सदिश के अवकलज को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define scalar point function.

   अदिश बिंदु फलन को परिभाषित कीजिए।

   (iv) If a is a constant vector, then :

   $$\text{curl } a = \nabla \times a = 0$$

   यदि a एक अचर सदिश है, तो :

   $$\text{curl } a = \nabla \times a = 0$$

   (v) State Gauss's divergence theorem.

   गॉस की अपसरण प्रमेय का कथन लिखिए।

   (vi) Define definite integral.

   निश्चित समाकल को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define Auxiliary circle.

   सहायक वृत्त को परिभाषित कीजिए।

   (viii) Define Ellipsoid.

   दीर्घवृत्तज को परिभाषित कीजिए।

   (ix) Write the condition of orthogonality of *two* spheres.

   दो गोलों के लाम्बिकता का प्रतिबंध लिखिए।

(x) What conic does the following equation represent ?

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

निम्न समीकरण में कौनसे शांकव को निरूपित करता है ?

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

(xi) Define enveloping cylinder.

अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।

(xii) Define reciprocal cone.

व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, then find the value of grad f at the point (1, –2, 1).

यदि $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ हो, तो बिंदु (1, –2, 1) पर grad f का मान ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

If $f = (ax+3y+4z)\hat{i} + (x-2y+3z)\hat{j} + (3x+2y-z)\hat{k}$ is a solenoidal vector, then find a.

यदि $f = (ax+3y+4z)\hat{i} + (x-2y+3z)\hat{j} + (3x+2y-z)\hat{k}$ एक परिनालिका सदिश हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

3. Evaluate $\int_C \mathrm{F}.dr$, where $\hat{\mathrm{F}} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$, C is the arc of the curve $\vec{r} = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$ from $t = 0$ to $t = 2\pi$.

मान ज्ञात कीजिए $\int_C \mathrm{F}.dr$, जहाँ $\hat{\mathrm{F}} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$, C वक्र $\vec{r} = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$ का $t = 0$ से $t = 2\pi$ तक का चाप है।

Or

(अथवा)

Evaluate by Green's theorem :

$$\int_{C} (x^2 - \cosh y)dx + (y + \sin x)dy$$

where C is the rectangle with vertices (0, 0), (π, 0), (π, 1) and (0, 1).

ग्रीन प्रमेय की सहायता से मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{C} (x^2 - \cosh y)dx + (y + \sin x)dy$$

जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष क्रमशः (0, 0), (π, 0), (π, 1) तथा (0, 1) हैं।

4. Show that the equation $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ and $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ represent the same conic.

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ और $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

Or

(अथवा)

Prove that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ will touch the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, if $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्पर्श करेगी, यदि $(A - e)^2 + B^2 = 1$।

5. A sphere of constant radius k passes through the origin and meets the axes in A, B, C. Prove that the centroid of the triangle ABC lies on the sphere :

$$9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$$

अचर त्रिज्या k का गोला मूल बिंदु से गुजरता है एवं निर्देशी अक्षों को A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिंदु पथ $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ है।

Or

(अथवा)

Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base is the guiding curve :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z = 0$$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) तथा आधार निर्देशक वक्र $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z = 0$ है।

6. Find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के समान संयुग्मी व्यास का बिंदु पथ ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the locus of centres of section of the paraboloid :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

which are of constant area πk^2 ?

परवलय $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ के अचर क्षेत्रफल πk^2 वाले परिच्छेदों के केन्द्र का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. Prove that :

$$\text{div}\left(r\,\text{grad}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{3}{r^4}=\nabla.\left[r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

सिद्ध कीजिए :

$$\text{div}\left(r\,\text{grad}\frac{1}{r^3}\right)=\frac{3}{r^4}=\nabla.\left[r\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

8. Verify Stoke's theorem for the function $F=x^2\hat{i}+xy\hat{j}$ integrated round the square in the plane z = 0, whose sides are along the lines x = y = 0 and x = y = a.

फलन $F=x^2\hat{i}+xy\hat{j}$ के लिए स्टॉक प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ F का समाकल तल z = 0 में स्थित वर्ग के चारों ओर किया गया है जिसकी भुजाएँ रेखा x = y = 0 तथा x = y = a के अनुदिश हैं।

9. Prove that four normals can be drawn on a conic from any given point.

सिद्ध कीजिए कि किसी दिए हुए बिंदु से शांकव पर चार अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं।

10. Find the equation of a right circular cylinder whose guiding circle passes through the points (a, 0, 0), (0, b, 0) and (0, 0, c).

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त बिंदुओं (a, 0, 0), (0, b, 0) और (0, 0, c) से गुजरता है।

11. Prove that the locus of the pole of the plane $lx + my + nz = p$ w.r.t. the system of conicoid :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

सिद्ध कीजिए कि शांकव $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$, जहाँ λ प्राचल है, के सापेक्ष समतल $lx + my + nz = p$ के सापेक्ष समतल के ध्रुव का बिन्दु पथ दिए समतल के लम्बवत् एक सरल रेखा होती है।