Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SLA–125

B.A./B.Sc. Part–III Due of Part–I (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks :* ***66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ) 1 each

1. (i) Write the formula for lengths of polar normal.

ध्रुवी अभिलम्ब की लम्बाई का सूत्र लिखिए।

(ii) Define Asymptote.

अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define Homogeneous function.

समघात फलन को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Jacobian.

जेकोबियन को परिभाषित कीजिए।

(v) Write the necessary conditions for $f(a, b)$ to be an extreme value of $f(x, y)$.

फलन $f(x, y)$ के चरम मान $f(a, b)$ होने का आवश्यक प्रतिबंध लिखिए।

(vi) Define the point of Inflexion.

नति परिवर्तन बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write the formula of Legendre's duplication.

लिजेन्ड्रे द्विगुणन सूत्र लिखिए।

(viii) Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dx\, dy$$

(ix) Define Quadrature.

क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।

(x) Find the length of the arc of the curve $y = \log \sec x$ from $x = 0$ to $x = \frac{\pi}{3}$.

वक्र $y = \log \sec x$ के $x = 0$ से $x = \frac{\pi}{3}$ तक चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब) 4 each

2. Find the envelope of the family of the following straight lines; α being the parameter :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

Or

(अथवा)

Find the radius of curvature at point $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ on the folium :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

फोलियम $x^3 + y^3 = 3axy$ के बिन्दु $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

3. If $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$, prove that :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

यदि $x^3 + y^3 - 3ax^2 = 0$, सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

Or

(अथवा)

If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, then find the value of $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

यदि $u^3 + v^3 = x + y$ तथा $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, तो $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. Find the maximum value of :

$$u = \sin x \sin y \sin (x + y).$$

उच्चतम मान ज्ञात कीजिए :

$$u = \sin x \sin y \sin (x + y)$$

Or

(अथवा)

Find the nature and position of double points of the curve :

$$x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

निम्न वक्र के द्विक् बिन्दुओं की स्थिति व प्रकृति ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

5. Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(a\cos^4\theta + b\sin^4\theta)}} = \frac{\left\{\left|\frac{1}{4}\right.\right\}^2}{4(ab)^{1/4}\sqrt{\pi}}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(a\cos^4\theta + b\sin^4\theta)}} = \frac{\left\{\left|\frac{1}{4}\right.\right\}^2}{4(ab)^{1/4}\sqrt{\pi}}$$

Or

(अथवा)

Evaluate the following integral by changing the order of integration :

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$$

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$$

6. Find the intrinsic equation of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ taking pole as the fixed point. Hence or otherwise, show that :

$$S^2 + 9\rho^2 = 16a^2$$

ध्रुव को स्थिर बिन्दु मानकर कारडियोइड $r = a(1 + \cos\theta)$ का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए। फलतः या अन्यथा प्रदर्शित कीजिए :

$$S^2 + 9\rho^2 = 16a^2$$

Or

(अथवा)

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. Show that the asymptotes of the following cubic cut the curve again in three points which lie on the straight line $x - y + 1 = 0$:

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न त्रिपद वक्र के अनन्तस्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा $x - y + 1 = 0$ पर स्थित हो :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$ 2+8+2=12

8. (a) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$$

(b) If $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$, then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

यदि $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 6+6=12

9. Find the maximum value of $x^p y^q z^r$, where $ax + by + cz = p + q + r$.

$x^p y^q z^r$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $ax + by + cz = p + q + r$. 12

10. Show that :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

Hence deduce that :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}}$$

प्रदर्शित कीजिए कि :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

फलतः निगमन कीजिए कि :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^{n+1}}$$ 8+4=12

11. Find the volume generated by the Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, when it revolves about the following :

(a) Initial line

(b) Line $\theta = \frac{\pi}{2}$

द्विपाशी $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ से जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जब यह निम्न के परितः परिभ्रमण करें :

(अ) आरम्भिक रेखा

(ब) रेखा $\theta = \frac{\pi}{2}$ 10+2=12