

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

SED-407

B.Sc./B.Ed. IV Year Due of III Year (Supplementary) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I (CC-5)

(Complex Analysis)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 60

Section-A

(Marks : 2 × 8 = 16)

Note :- Answer all *eight* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 2 marks.

(खण्ड-अ)

(अंक : 2 × 8 = 16)

नोट :- सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 8 × 3 = 24)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 8 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 8 × 3 = 24)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

BI-220

(1)

SED-407 P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Analytic Function.
विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Conformal Mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define invariant points of a bilinear transformation.
द्विरैखिक रूपान्तरण के निश्चर बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Complex line integral.
सम्मिश्र रेखा समाकलन को परिभाषित कीजिए।
- (v) State Liouville's theorem.
ल्यूवेल प्रमेय का कथन लिखिए।
- (vi) Define Essential Singularity.
अनिवार्य विचित्रता को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Zeros of an analytic function.
विश्लेषित फलन के शून्यक को परिभाषित कीजिए।
- (viii) State the Cauchy's residue theorem.
कॉशी अवशेष प्रमेय का कथन लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Prove that the function $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ is continuous as well as analytic everywhere.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ सर्वत्र संतत एवं विश्लेषिक है।

Or

(अथवा)

Show that $f(z) = \bar{z}$ is not differentiable at any point.

प्रदर्शित कीजिए कि $f(z) = \bar{z}$ किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

3. Prove that the function $u = \cos x \cosh y$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cosh y$ प्रसंवादी है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$, transform the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$

into the straight line $4u + 3 = 0$

प्रदर्शित कीजिए कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$, वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$

पर रूपान्तरित करता है।

4. State and prove Cauchy's integral theorem.

कौशी समाकलन प्रमेय का कथन लिखिए तथा सत्यापित कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that the derivative of an analytic functions is itself an analytic function.

सिद्ध कीजिए कि किसी विश्लेषिक फलन का अवकलज स्वयं एक विश्लेषिक फलन होता है।

5. Expand $\cos z$ in a Taylor series about $z = \pi/2$.

$\cos z$ की $z = \pi/2$ पर टेलर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Discuss the singularities of the function $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a} - 1}$.

फलन $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a} - 1}$ की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए।

6. State and prove Rouché's theorem.

रोशे प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the residue of $f(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$ at infinity.

$f(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$ का अनन्त पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र संतत है किन्तु मूल बिन्दु के अतिरिक्त कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

8. If $w = f(z)$ is a conformal mapping of a domain D in the z -plane into w -plane, then $f(z)$ is an analytic function of z in D .

यदि $w = f(z)$, z -समतल के प्रान्त D से w -समतल के प्रान्त D' में अनुकोण प्रतिचित्रण है, तो $f(z)$, D में z का विश्लेषिक फलन होता है।

9. Verify Cauchy's theorem for the function $f(z) = 5 \sin 2z$, if f is the square with vertices at $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

फलन $f(z) = 5 \sin 2z$ के लिए वक्र पथ f जो शीर्षों $1 \pm i$, $-1 \pm i$ वाला वर्ग है, के अनुदिश समाकलन कर कॉशी प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

10. State and prove Taylor's theorem.

टेल्सर प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

11. Use the method of contour integration to prove that :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, \text{ where } a > 1.$$

परिपथ समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, \text{ जहाँ } a > 1।$$