Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

ED–3017

B.Sc. B.Ed. (IIIrd Year) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper – I (CC-5)

(Complex Analysis)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : 60*

Section–A **(Marks : 2 × 8 = 16)**

Note :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **2** marks.

(खण्ड–अ) **(अंक : 2 × 8 = 16)**

नोट :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 8 × 3 = 24)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **8** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 8 × 3 = 24)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **8** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define the Harmonic Function.

   प्रसंवादी फलन को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Define Bilinear Transformation.

   द्विरैखीय रूपान्तरण को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define Contour.

   कंटूर को परिभाषित कीजिए।

   (iv) State Laurent theorem.

   लौरेंट प्रमेय का कथन लिखिए।

   (v) State polar form of Cauchy-Riemann equation.

   कौशी–रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिए।

   (vi) Define Mapping.

   प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define removable singularity.

   अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

   (viii) State argument principle.

   कोणांक सिद्धान्त को लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Derive the Cartesian form of Cauchy-Riemann equation.

   कौशी–रीमान समीकरण का कार्तीय रूप ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that :

$$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

3. If $w = f(z)$ represent a conformal transformation of a domain D in domain D′ of w-plane in the z-plane, the $f(z)$ is an analytic function of z in D.

   यदि $w = f(z)$ प्रदेश D का z-समतल में एक अनुकोण रूपान्तरण w–समतल के प्रदेश D′ में है, तब $f(z)$, D में z का विश्लेषिक फलन है।

   Or

   (अथवा)

   Find a bilinear transformation that maps the points $z = 2, i, -2$ into $w = 1, i, -1$ respectively.

   एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, i, -2$ को क्रमशः $w = 1, i, -1$ में प्रतिचित्रित करे।

4. Let $f(z)$ is analytic with a continuous derivative $f'(z)$ in a simply connected domain G. If C is a closed contour lying in G then :

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

   माना कि एकशः संबद्ध प्रदेश G में $f(z)$ विश्लेषिक फलन है तथा $f'(z)$ सतत् है। यदि G से C एक संवृत कंटूर हो, तो :

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

   Or

   (अथवा)

   Derive Poisson integral formula.

   प्वॉसां का समाकल सूत्र ज्ञात कीजिए।

5. State and prove Morera theorem.

   मोरेरा प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

Or

(अथवा)

Expand e^z and sin z in a Taylor's series about $z = 0$ and determine the region of convergence in each case.

फलनों e^z तथा sin z का $z = 0$ के सामीप्य में टेलर श्रेणी में प्रसार कीजिए तथा प्रत्येक श्रेणी के अभिसारी होने का क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

6. Find the residue at the polars of :

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{(z-a)^2}$$

फलन :

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{(z-a)^2}$$

के अनन्तकी पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

State and prove Cauchy's residue theorem.

कौशी अवशेष प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. If a function $f(z)$ is analytic at all points within a circle C with centre z_0 and radius r, then at each point z within C :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{\underline{|2}} f''(z_0) + \ldots\ldots..$$

$$\frac{(z-z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

or $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ where } a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}.$$

यदि वृत्त C जिसका केन्द्र z_0 तथा त्रिज्या r है, के अन्दर सभी बिन्दुओं पर $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन हो, तो C के अन्दर प्रत्येक बिन्दु z पर :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{\underline{|2}} f''(z_0) + \ldots\ldots..$$

$$\frac{(z - z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

या $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ जहाँ $a_n = \dfrac{f^n(z_0)}{n!}$.

8. Find the image of infinite $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ strip under the transformation $w = 1/z$.

रूपान्तरण $w = 1/z$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

9. Let $f(z)$ be analytic in the annulus (ring shaped region) G between two concentric circles c_1 and c_2 with center z_0 and radii R_1 and R_2 ($R_1 > R_2$) respectively then at any point z of the annulus :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

where

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, n = 0, 1, 2\ldots\ldots\ldots$$

and

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}}, n = 1, 2, 3\ldots\ldots\ldots$$

माना कि दो सहकेन्द्रीय वृत्त c_1 एवं c_2 जिनके केन्द्र z_0 तथा त्रिज्याएँ क्रमशः R_1 एवं R_2 ($R_1 > R_2$) के मध्य वलयिका G में $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन हो, तो वलयिका के किसी बिन्दु z पर :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

जहाँ

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, n = 0, 1, 2.........$$

तथा

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}}, n = 1, 2, 3.........$$

10. Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, (a > 0)$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, (a > 0)$$

Or

(अथवा)

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \cos^2 \theta}, (a > 0)$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{a\, d\theta}{a^2 + \cos^2 \theta}, (a > 0)$$

11. Find the residues of :

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

at $z = 1, 2, 3$ and infinity and show that their sum is zero.

$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1, 2, 3$ एवं अनन्त पर अवशेष ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि उनका योग शून्य है।