Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**]   [Total No. of Printed Pages : **7**

ED–1079

B.Sc. B.Ed. (Ist Year) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper – II (CC–5)

(Vector Geometry and Linear Algebra)

Time : 3 Hours]   [*Maximum Marks : 60*

Section–A   **(Marks : 2 × 8 = 16)**

Note :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **2** marks.

(खण्ड–अ)   **(अंक : 2 × 8 = 16)**

नोट :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

Section–B   **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब)   **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C (Marks : 8 × 3 = 24)

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **8** marks.

(खण्ड–स) (अंक : 8 × 3 = 24)

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **8** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) If $\vec{a} = ti + t^2 j + (1-t)k$, $\vec{b} = 3t^2 i - j + t^3 k$, then find $\frac{d}{dt}(a \cdot b)$.

   यदि $\vec{a} = ti + t^2 j + (1-t)k$, $\vec{b} = 3t^2 i - j + t^3 k$, तो $\frac{d}{dt}(a \cdot b)$ ज्ञात कीजिए।

   (ii) Define Gauss' divergence theorem.

   गॉस डाइवजेन्स प्रमेय का कथन लिखिए।

   (iii) If $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, find the value of grad f at the point $(1, -2, -1)$.

   यदि $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, तो बिन्दु $(1, -2, -1)$ पर grad f का मान ज्ञात कीजिए।

   (iv) Find $\int f(t)\,dt$, where $f(t) = (t - t^2)i + 2t^3 j - 3k$.

   $\int f(t)\,dt$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(t) = (t - t^2)i + 2t^3 j - 3k$.

   (v) Define Vector Space.

   सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Linear Dependence and Linear Independence of vectors.

सदिश की रैखिक आश्रितता तथा अनाश्रितता को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Basis and Dimension.

आधार तथा विमा को परिभाषित कीजिए।

(viii) Find Eigenvalues of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मान ज्ञात कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Find a unit tangent vector at any point on the curve $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

वक्र $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ के किसी बिन्दु पर इकाई स्पर्श सदिश ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = xi + yj + zk$, prove that grad $r^m = mr^{m-2}\vec{r}$.

यदि $r = |\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r} = xi + yj + zk$, सिद्ध कीजिए grad $r^m = mr^{m-2}\vec{r}$.

3. Find the direction and magnitude of maximum directional derivative of $f = x^2yz^3$ at the point (2, 1, –1).

$f = x^2yz^3$ का बिन्दु (2, 1, –1) पर अधिकतम दिक अवकलज का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the angle between the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at the point (2, –1, 2).

पृष्ठ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ तथा $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच का कोण बिन्दु (2, –1, 2) पर ज्ञात कीजिए।

4. If $\vec{r} = xi + yj + zk$ and $r = |\vec{r}|$, prove that div $r^n\vec{r} = (n + 3)\, r^n$. Hence show that $r^n\vec{r}$ will be solenoidal if $n = -3$.

यदि $\vec{r} = xi + yj + zk$ तथा $r = |\vec{r}|$, सिद्ध कीजिए div $r^n\vec{r} = (n + 3)r^n$। तब दर्शाइए कि $r^n\vec{r}$ परिनालकीय सदिश होगा यदि $n = -3$.

Or

(अथवा)

If $(xyz)^b(x^ai + y^aj + z^ak)$ is a irrotational vector, then prove that either $b = 0$ or $a = -1$.

यदि $(xyz)^b(x^a i + y^a j + z^a k)$ एक अघूर्णीय सदिश है, तो सिद्ध कीजिए कि $b = 0$ या $a = -1$.

5. Evaluate $\iint_S \mathrm{F}\cdot\hat{n}d\mathrm{S}$, where $\mathrm{F} = 4xzi - y^2 j + yzk$. S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

$\iint_S \mathrm{F}\cdot\hat{n}d\mathrm{S}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $\mathrm{F} = 4xzi - y^2 j + yzk$। S पृष्ठों $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ से परिबद्ध घन का पृष्ठ है।

Or

(अथवा)

If V is the volume enclosed by any closed surface S, show that $\iint_S \vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{n}d\mathrm{S} = 6\mathrm{V}$.

यदि किसी संवृत्त पृष्ठ S का आयतन V है, तो सिद्ध कीजिए $\iint_S \vec{\mathrm{F}}\cdot\hat{n}d\mathrm{S} = 6\mathrm{V}$.

6. Prove that $\mathrm{S} = \{1, x, x^2\}$ is a basis for P_2, the set of polynomials of degree less than or equal to 2.

सिद्ध कीजिए कि $\mathrm{S} = \{1, x, x^2\}$ P_2 का आधार है, जहाँ P_2 कोटि 2 या इससे कम के बहुपद हैं।

Or

(अथवा)

Let V denote a vector space and $\mathrm{S} = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ a basis of V. Every vector in V can be written in a unique way as a linear combination of vectors of S.

यदि V एक सदिश समष्टि है तथा $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ V का एक आधार है। V के प्रत्येक सदिश को S के अवयवों के रैखिक रूपान्तरण में लिखा जा सकता है।

Section–C

(खण्ड–स)

7. Verify Stokes' theorem for the function $\vec{F} = x^2 i + xyj$ integrated round the square in the plane $z = 0$, whose sides are along the lines $x = y = 0$ and $x = y = a$.

   फलन $\vec{F} = x^2 i + xyj$ के लिए स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जबकि समाकलन समतल $z = 0$ में वर्ग $x = y = 0$ तथा $x = y = a$ पर किया गया है।

8. Determine the dimension of the subspace W of R^3, defined by $W = \{(d, c - d, c); c, d \in R\}$.

   R^3 की उपसमष्टि W की विमा ज्ञात कीजिए, जहाँ $W = \{(d, c - d, c); c, d \in R\}$.

9. Solve the following system of equations using Gauss' Elimination Method :

   गॉस एलीमिनेशन विधि से हल कीजिए :

$$2x - 2y + 3z = 2$$

$$x + 2y - z = 3$$

$$3x - y + 2z = 1$$

10. Show that the dimension of the vector space V(R) of all 2×2 real matrices is 4.

सिद्ध कीजिए कि 2×2 क्रम के सभी वास्तविक मैट्रिक्स के सदिश समष्टि V(R) की विमा 4 है।

11. Find Eigenvalues and Eigenvectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।