Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**]

[Total No. of Printed Pages : **7**

A–222

B.A./B.Sc. (Part–II) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

*Time : **3** Hours*]

[*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) State the Lami's theorem.

   लामी प्रमेय का कथन दीजिए।

   (ii) Define the various types of Friction.

   घर्षण के विभिन्न प्रकारों को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Write the principle of virtual work for a system of coplanar forces acting on a particle.

   किसी कण पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय के लिए कल्पित कार्य का सिद्धान्त लिखिए।

   (iv) Define null lines and null planes.

   शून्य आघूर्ण रेखा तथा शून्य समतल को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define tangential and normal velocity and acceleration.

   स्पर्शरेखीय एवं अभिलाम्बिक वेग व त्वरण को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define epoch and argument or phase of SHM.

   सरल आवर्त गति के आदि कोण तथा कोणांक या कला कोण को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Prove that if particle goes right round a circle, the sum of pressures at the ends of any diameter is constant.

   सिद्ध कीजिए, यदि कण वृत्त का पूरा चक्कर लगाता है, तो वृत्त के किसी भी व्यास के सिरों पर दबाव का योग अचर है।

   (viii) Define Tautochronous motion with example.

   एककालिक गति को सउदाहरण समझाइए।

   (ix) Define Newton's experimental law of impact.

   न्यूटन के प्रयोगात्मक संघट्ट को परिभाषित कीजिए।

   (x) Define aphelion and perihelion.

   अपसौर तथा उपसौर को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Two uniform rods AB and BC rigidly jointed at B so that ABC is a right angle, hang freely in equilibrium from a fixed point A. The lengths of the rods are a and b and their respective weights are W_a and W_b. If AB makes an angle θ with the vertical, prove that :

$$\tan\theta = \frac{b^2}{a(a+2b)}$$

दो सर्वत्रसम दण्ड AB तथा BC, B पर दृढ़ता से इस प्रकार जुड़े हुए हैं कि कोण ABC एक समकोण है तथा ये एक बिन्दु A से साम्यावस्था में स्वतंत्रतापूर्वक लटके हुए हैं। दण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः a तथा b तथा भार क्रमशः W_a व W_b हैं। यदि AB उर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan\theta = \frac{b^2}{a(a+2b)}$$

Or

(अथवा)

Prove that the least force required to pull a body of weight W on a rough horizontal plane is W sin λ, where λ is angle of friction.

सिद्ध कीजिए कि W भार के एक पिण्ड को रूक्ष क्षैतिज समतल पर खींचने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल W sin λ है, जहाँ λ घर्षण कोण है।

3. A heavy uniform string of length l is suspended from a fixed point A and its another end B is pulled horizontally by a force equal to the weight of a length a of the string. Show that the horizontal and vertical distances between A and B are $a\sinh^{-1}\frac{l}{a}$ and $\sqrt{l^2+a^2}-a$.

l लम्बाई की भारी एकसमान रस्सी एक स्थिर बिन्दु A से लटकी हुई है तथा दूसरा सिरा B, a लम्बाई की रस्सी के भार के समान क्षैतिज बल से खींचा जाता है। सिद्ध कीजिए कि A तथा B के मध्य क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रमशः $a\sinh^{-1}\frac{l}{a}$ तथा $\sqrt{l^2+a^2}-a$ हैं।

Or

(अथवा)

Derive the condition that straight line $\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n}$ may be a null line for the same system of forces.

सरल रेखा $\frac{x-f}{l}=\frac{y-g}{m}=\frac{z-h}{n}$ के समान बल निकाय के लिए शून्य आघूर्ण की रेखा हो सकने की शर्त व्युत्पन्न कीजिए।

4. An insect crawls at a constant rate u along the spoke of a cart wheel of radius a. The cart is moving with velocity v. Find the acceleration along and perpendicular to the spoke of insect at time t.

एक कीड़ा किसी गाड़ी के a त्रिज्या वाले पहिये के आरे पर अचर चाल u से रेंगता है और गाड़ी v वेग से चलती है। t समय पर आरे की दिशा में तथा उसके लम्बवत दिशा में कीड़े का त्वरण ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

A body moving in a straight line OAB with SHM has zero velocity when at points A and B whose distances from O are a and b respectively and has a velocity v when half-way between them. Show that the complete period is $\frac{\pi(b-a)}{v}$.

एक पिण्ड एक सरल रेखा OAB पर स.आ.ग. से गतिमान है। यह A तथा B पर विरामावस्था में है जिसकी O से दूरी क्रमशः a तथा b है और उसका वेग v है जब वह उनके मध्य बिन्दु पर है। प्रदर्शित कीजिए कि पूर्ण आवर्तकाल $\frac{\pi(b-a)}{v}$ है।

5. A particle is moving on a smooth curve and its velocity varies as the actual distance from the highest point. Prove that the curve is cycloid.

एक कण एक चिकने वक्र पर गतिमान है तथा इसका वेग उच्चतम बिन्दु से चापीय दूरी के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि वक्र एक चक्रज है।

Or

(अथवा)

A heavy particle of weight W attached to a fixed point by a light inextensible string, describes in a verticle plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and the lowest point of its path. Show that $n = m + 6$.

एक W भार वाला कण जोकि स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी से बँधा है और उर्ध्वाधर तल में एक वृत्त में घूम रहा है। जब कण अधिकतम तथा न्यूनतम ऊँचाई पर होता है तो डोरी में खिंचाव क्रमशः mW तथा nW होता है, तो सिद्ध कीजिए $n = m + 6$।

6. If v_1 and v_2 are the velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

$$(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$$

यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के रेखीय वेग हों जबकि वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम तथा अधिकतम दूरियों पर हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$$

Or

(अथवा)

Find the law of force towards the pole under which the curve $r = a \tan \theta$ is described. Also find the velocity at any point of curve. Which is at a distance r from pole.

ध्रुव बिंदु की ओर बल का नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण वक्र $r = a \tan \theta$ पर गतिमान है। साथ ही वक्र के किसी बिन्दु, जो कि ध्रुव से r दूरी पर है, वेग ज्ञात कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. A uniform rectangular board, whose sides are $2a$ and $2b$, rests in limiting equilibrium in contact with two rough pegs in the same horizontal line at a distance d apart. Show that the inclination θ of the side $2a$ to the horizontal is given by following equation :

$$d \cos \lambda \cos (\lambda + 2\theta) = a \cos \theta - b \sin \theta$$

where λ is angle of friction

$2a$ तथा $2b$ भुजाओं वाला एकसमान आयतीय बोर्ड क्षैतिज रेखा पर d दूरी पर स्थित दो रूक्ष खूंटियों पर सीमान्त साम्यावस्था में है। प्रदर्शित कीजिए कि भुजा $2a$ का क्षैतिज से झुकाव θ निम्न समीकरण से प्राप्त होगा :

$$d \cos \lambda \cos (\lambda + 2\theta) = a \cos \theta - b \sin \theta$$

जहाँ λ घर्षण कोण है।

8. A heavy uniform string hangs over two smooth pegs in the same horizontal line. If the length of each portion which hangs freely be n times the length between the pegs, prove that :

$$\frac{\text{Whole length of string}}{\text{Distance between pegs}} = \frac{K}{\log K}$$

where $K = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)}$.

एक क्षैतिज रेखा पर स्थित दो चिकनी खूंटियों से एक भारी एकसमान डोरी लटकी हुई है। यदि स्वतंत्र लटकने वाले प्रत्येक भाग की लम्बाई खूंटियों के मध्य लम्बाई का n गुणा हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\text{डोरी की कुल लम्बाई}}{\text{खूंटियों के मध्य दूरी}} = \frac{K}{\log K},$$

जहाँ $K = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)}$ ।

9. Show that the time of descent to the centre of force, the force varying as the square of the distance from the centre through the first half of its initial distance is to that through the second half is $\pi + 2 : \pi - 2$.

किसी कण पर क्रियाशील बल, बल केन्द्र से दूरी के वर्ग व्युत्क्रमानुपाती विचरण करता हो तो सिद्ध कीजिए कि केन्द्र की ओर चलने वाले कण द्वारा प्रथम आधी दूरी तथा द्वितीय आधी दूरी चलने में लगाए गए समयों का अनुपात $\pi + 2 : \pi - 2$ है।

10. Discuss the motion of a particle on the outside of a smooth vertical circle or sphere.

एक चिकने उर्ध्वाधर वृत्त या गोले के बाहर की ओर कण की गति की विवेचना कीजिए।

11. A particle describes the following curve under a central force P, when pole is the centre of force. Show that the force $P \propto \frac{1}{r^7}$:

$$a^2u^2 = \frac{\cosh 2\theta - 1}{\cosh 2\theta + 2}$$

एक कण निम्न वक्र में केन्द्रीय बल P के अधीन चलता है, जहाँ बल केन्द्र ध्रुव है। प्रदर्शित कीजिए कि बल $P \propto \frac{1}{r^7}$:

$$a^2u^2 = \frac{\cosh 2\theta - 1}{\cosh 2\theta + 2}$$