Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11** ] [ Total No. of Printed Pages : **8**

# A–137

## B.A./B.Sc. (Part–I) Examination, 2022

## MATHEMATICS

Paper - III

## (Vector Calculus and Geometry)

*Time : **3** Hours* ] [ *Maximum Marks : **68***

**Section–A** **(Marks : 1 × 12 = 12)**

***Note*** :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

**(खण्ड–अ)** **(अंक : 1 × 12 = 12)**

**नोट** :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

**Section–B** **(Marks : 4 × 5 = 20)**

***Note*** :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

**(खण्ड–ब)** **(अंक : 4 × 5 = 20)**

**नोट** :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

**Section–C** **(Marks : 12 × 3 = 36)**

***Note*** :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

**(खण्ड–स)** **(अंक : 12 × 3 = 36)**

**नोट** :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

## Section–A

## (खण्ड–अ)

1. (i) Write the vector equation of parabola.

परवलय का मानक सदिश समीकरण लिखिए।

(ii) Find :

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

when $\vec{a} = 5t^2 i - \cos tj$

$\vec{b} = ti + \sin tj$

ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

जबकि $\vec{a} = 5t^2 i - \cos tj$

$\vec{b} = ti + \sin tj$

(iii) Define gradient of a scalar point function.

अदिश बिन्दु फलन की प्रवणता को परिभाषित कीजिए।

(iv) Show that :

$$\int\left(2f\cdot\frac{df}{dt}\right)dt = f^2 + C$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\int\left(2f\cdot\frac{df}{dt}\right)dt = f^2 + C$$

(v) If $r(t) = ti - 3j + 2tk$; $s(t) = i - 2j + 2k$ and $v(t) = 3i + tj - k$, then find the value :

$$\int_1^2 r.(s\times v)dt$$

यदि $r(t) = ti - 3j + 2tk$; $s(t) = i - 2j + 2k$ और $v(t) = 3i + tj - k$, तो मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^2 r.(s \times v)dt$$

(vi) Write the statement of Green's theorem.

ग्रीन प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

(vii) Define Conic section.

शांकव परिच्छेद को परिभाषित कीजिए।

(viii) What conic does the following equation represents ?

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

निम्नलिखित समीकरण कौनसे शांकव को निरूपित करता है ?

$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$

(ix) Write the diameter form of the equation of a sphere.

व्यास रूप में गोले का समीकरण लिखिए।

(x) Define radical centre.

मूलाक्ष केन्द्र को परिभाषित कीजिए।

(xi) Define conjugate planes.

संयुग्मी तल को परिभाषित कीजिए।

(xii) Define enveloping cone.

अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए।

## Section–B

## (खण्ड–ब)

2. A particle moves along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$, where $t$ is time. Find the component of its velocity and acceleration at time $t = 1$ in the direction $i + j + 3k$.

एक कण वक्र $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$ के अनुदिश गतिमान है जहाँ $t$ समय है। समय $t = 1$ पर सदिश $i + j + 3k$ की दिशा में कण के वेग एवं त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए।

***Or***

**(अथवा)**

Find the directional derivative of $f = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $i + 2j + 2k$ at the point (1, 2, 0).

बिन्दु (1, 2, 0) पर $f = xy + yz + zx$ का $i + 2j + 2k$ की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

3. Evaluate :

$$\int_C F.dr$$

where $F = xyi + yzj + zxk$ and C is the curve $r = ti + t^2j + t^3k$, $t$ varying from –1 to +1.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C F.dr$$

जहाँ $F = xyi + yzj + zxk$ तथा C वक्र $r = ti + t^2j + t^3k$ है तथा $t$ का मान –1 से +1 तक विचरण करता है।

***Or***

**(अथवा)**

Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C (e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy)$$

where C is the rectangle with vertices (π, 0), (0, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ and $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ग्रीन प्रमेय से मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy)$$

जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष हैं (π, 0), (0, 0), $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$।

4. Find the coordinates of the centre of the following conic :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

निम्नलिखित शांकव के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

***Or***

**(अथवा)**

If PSQ and PHR be two chords of an ellipse through the foci S and H, prove that :

$$\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$$

is independent of P.

यदि दीर्घवृत्त की दो जीवाएँ PSQ तथा PHR क्रमशः नाभियाँ S तथा H से गुजरती हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$$

P की स्थिति से स्वतंत्र है।

5. A plane passes through a fixed point (*a, b, c*) and cuts the axes in A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere OABC is :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

एक समतल स्थिर बिन्दु (*a, b, c*) से गुजरता है एवं निर्देशी अक्षों को बिन्दु A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दुपथ है :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

***Or***

**(अथवा)**

Show that the equation of the cone whose vertex is the origin and base the curve $f(x, y) = 0, z = c$ is $f\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}\right) = 0.$

सिद्ध कीजिए कि उस शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूलबिन्दु है तथा निर्देशक वक्र $f(x, y) = 0, z = c$ है, $f\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}\right) = 0$ होगा।

6. Prove that the locus of the pole of the plane $lx + my + nz = P$ w.r.t. the system of conicoid :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

where $\lambda$ is the parameter, is a straight line perpendicular to the given plane.

सिद्ध कीजिए कि शांकवज :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

जहाँ $\lambda$ प्राचल है, के समतल $lx + my + nz = P$ के ध्रुव का बिन्दुपथ दिये समतल के लम्बवत् एक सरल रेखा होती है।

***Or***

**(अथवा)**

Prove that the sum of the squares of the reciprocal of three mutually perpendicular semi-diameters of an ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ is constant.

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के किन्हीं तीन परस्पर लम्बवत् अर्द्धव्यास के व्युत्क्रमों के वर्गों का योगफल अचर होता है।

## Section–C

## (खण्ड–स)

7. If $r = |\gamma|$, where $\gamma = xi + yj + zk$, prove that :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

यदि $r = |\gamma|$, जहाँ $\gamma = xi + yj + zk$, सिद्ध कीजिए :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$$

8. Verify Gauss's divergence theorem and show that :

$$\int_S F \cdot \hat{n}\, dS = \frac{1}{3} a^5$$

where $F = (x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k$.

S is the surface of the cube bounded by the coordinates planes :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = a,\ y = a,\ z = a.$$

गॉस प्रमेय को सत्यापित करते हुए दर्शाइए कि :

$$\int_S F \cdot \hat{n}\, dS = \frac{1}{3} a^5$$

जहाँ $F = (x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k$

S निम्न निर्देशांक समतलों द्वारा परिबद्ध घन का पृष्ठ है :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = a,\ y = a,\ z = a.$$

9. Trace the following curve :

$$x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$$

निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$$

10. Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$.

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$ है।

11. Find the locus of the straight lines drawn through a fixed point $(f, g, h)$ whose polar lines w.r.t. the quadrices $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ are coplanar.

एक स्थिर बिन्दु $(f, g, h)$ से खींची गई सरल रेखाओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिनकी ध्रुवीय रेखाएँ द्विघात $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ तथा $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ के सापेक्ष समतलीय हैं।