Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**]   [Total No. of Printed Pages : **7**

A–129

B.A./B.Sc. (Part–I) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 3 Hours]   [*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Descarte's rule of signs.

देकार्ते का चिह्न नियम लिखिए।

(ii) Define symmetric functions of Roots.

मूलों के सममित फलन की परिभाषा लिखिए।

(iii) Define Hermitian and Skew Hermitian Matrices.

हर्मिशियन तथा विषम हर्मिशियन मैट्रिक्स की परिभाषा लिखिए।

(iv) Define Characteristic Equation.

अभिलाक्षणिक समीकरण की परिभाषा लिखिए।

(v) Define Monoid.

मोनोइड की परिभाषा लिखिए।

(vi) Define Cyclic Group.

चक्रीय समूह की परिभाषा लिखिए।

(vii) Give definition of isomorphic groups.

तुल्यकारी समूह की परिभाषा लिखिए।

(viii) Give definition of kernel of Homomorphism.

समाकारिता की अष्टि की परिभाषा लिखिए।

(ix) Define Transpositions.

पक्षान्तरण की परिभाषा लिखिए।

(x) If :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

find A^3.

यदि :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

तब A^3 का मान ज्ञात कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If roots of the equation $x^n - 1 = 0$ are 1, α, β, γ ...., show that :

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma), \ldots\ldots\ldots\ldots = n$$

यदि समीकरण $x^n - 1 = 0$ के मूल 1, α, β, γ .... हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma), \ldots\ldots\ldots\ldots = n$$

Or

(अथवा)

Find the condition that the roots of the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ may be in G.P.

प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि समीकरण $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

3. If A is symmetric (skew symmetric) matrix, then show that B^TAB is symmetric (skew symmetric) matrix.

यदि A सममित (विषम सममित) मैट्रिक्स है तो सिद्ध कीजिए B^TAB सममित (विषम सममित) मैट्रिक्स है।

Or

(अथवा)

Solve :

$$x + 3y - 2z = 0$$
$$2x - y + 4z = 0$$
$$x - 11y + 14z = 0$$

हल कीजिए :

$$x + 3y - 2z = 0$$
$$2x - y + 4z = 0$$
$$x - 11y + 14z = 0$$

4. If s is the set of real numbers other than -1, then show that $(s, *)$ is a group where $*$ is the operation defined as :

$$a * b = a + b + ab \quad \forall\ a, b \in s$$

यदि -1 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय s हो तो सिद्ध कीजिए कि $(s, *)$ एक समूह है जहाँ $*$ निम्न प्रकार परिभाषित संक्रिया है :

$$a * b = a + b + ab \quad \forall\ a, b \in s$$

Or

(अथवा)

The order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group i.e. $o(a) \leq o(G) \quad \forall\ a \in G$.

किसी परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित एवं समूह की कोटि से कम या बराबर होती है अर्थात् $o(a) \leq o(G) \quad \forall\ a \in G$.

5. Every homomorphic image of an Abelian group is Abelian.

प्रत्येक आबेली समूह का समाकारी प्रतिबिम्ब भी आबेली होता है।

Or

(अथवा)

The intersection of any *two* normal subgroups of a group is a normal subgroup.

किसी समूह के किन्हीं **दो** प्रसामान्य उपसमूह का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

6. If :

$$\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$$

and

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then prove that :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = \big((\rho(1)\,\rho(7)\,\rho(2)\,\rho(6)\,\rho(3)\,\rho(5)\,\rho(8)\,\rho(4)\big)$$

यदि :

$$\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$$

और

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = \big((\rho(1)\,\rho(7)\,\rho(2)\,\rho(6)\,\rho(3)\,\rho(5)\,\rho(8)\,\rho(4)\big)$$

Or

(अथवा)

Show that the set of the permutations (a), (ab), (cd), $(ab)\ (cd)$ of the set $\{a, b, c, d\}$ forms a group for the product of permutations.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{a, b, c, d\}$ के क्रमचय (a), (ab), (cd), $(ab)\ (cd)$ क्रमचय गुणन के लिए एक समूह बनाते हैं।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (i) Solve the equation $x^3 - 18x - 35 = 0$ by Cardon's method.

   समीकरण $x^3 - 18x - 35 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए। 6

   (ii) Solve the following reciprocal equation :

   $$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

   निम्न व्युत्क्रम समीकरण को हल कीजिए :

   $$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$ 6

8. Every square matrix A satisfy its own characteristics equation $|A - XI| = 0$ or $\phi(A) = 0$.

   प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स A स्वयं की अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - XI| = 0$ या $\phi(A) = 0$।

9. (i) If a, b are elements of a group G, then the equations $aX = b$ and $Ya = b$ have unique solution in G.

यदि a और b किसी समूह G के अवयव हों तो समीकरण $aX = b$ तथा $Ya = b$ के G में अद्वितीय हल होते हैं। 6

(ii) If H and K are two subgroups of a group G, then HK is a subgroup of G iff ($\Leftrightarrow$) HK = KH.

यदि H और K किसी समूह G के दो उपसमूह हों तो HK, G का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि ($\Leftrightarrow$) HK = KH. 6

10. (i) A homomorphism defined from a group G onto G′ is an isomorphism iff $\ker f = \{e\}$.

किसी समूह G से समूह G′ पर परिभाषित आच्छादक समाकारिता f, तुल्याकारिता होती है यदि और केवल यदि $\ker f = \{e\}$। 6

(ii) A subgroup H of a group G is a normal subgroup iff :

$$H \Delta G \Leftrightarrow x H x^{-1} = H \quad \forall\ x \in G$$

किसी समूह G का कोई उपसमूह H एक प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि

$$H \Delta G \Leftrightarrow x H x^{-1} = H \quad \forall\ x \in G$$ 6

11. (i) The set A_n of all own permutations of degree n is a group of order $\frac{\lfloor n}{2}$ for the product of permutations.

n अंशांक के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय An क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए $\frac{\lfloor n}{2}$ कोटि का समूह होता है। 6

(ii) If :

$$\rho = (1\ 2\ 3\ ....,\ (n-1));\ \sigma = (1\ n)$$

then prove that :

$$\rho^k \sigma \rho^{-k} = (k+1\ n) \quad k < n$$

यदि :

$$\rho = (1\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-1));\ \sigma = (1\ n)$$

तो सिद्ध कीजिए :

$$\rho^k\ \sigma\ \rho^{-k} = (k+1\ n) \quad k < n$$ 6