

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 7

A-212

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BR-30

(1)

A-212 P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1×10=10

1. (i) Define Boundedness of functions.
फलनों की परिवद्धता को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Heine's definition of continuity.
सांतत्यता की हैनी को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define differentiability of functions of two variables.
दो चरों वाले फलनों की अवकलनीयता को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Write the statement general mean value theorem.
व्यापक मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए।
- (v) Define Darboux sums.
डारबू-योग को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Integral functions.
समाकल-फलन को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define limit point of a sequence.
अनुक्रम के सीमा-बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Show that the following series is oscillating :
$$4 - 4 + 4 - 4 + \dots + \dots\dots$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी दोलनी है :
$$4 - 4 + 4 - 4 + \dots + \dots\dots$$
- (ix) Define uniform convergence.
एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।
- (x) Write the kinds of improper-integral.
अनन्त समाकल कितने प्रकार के हैं ? लिखिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

4×5=20

2. Using $(\epsilon - \delta)$ definition of limit, prove that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

सीमा की $(\epsilon - \delta)$ परिभाषा के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

Or

(अथवा)

Show that the following function is discontinuous at the point $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु $x = 0$ पर असतत् है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

3. Find the Lagrange's and Cauchy's remainder after n terms in the expansion of $\log(1 + x)$.

फलन $\log(1 + x)$ के विस्तार में n पदों के पश्चात् लैग्रांजे एवं कोशी रूप वाले शेषफल ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Show that the function $f(x, y) = \sin x + \cos y$ is differentiable everywhere.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y) = \sin x + \cos y$ सर्वत्र अवकलनीय है।

4. Prove that every Montonic function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R-समाकलनीय होता है।

Or

(अथवा)

Find the lower and upper integrals of the following function f in the interval $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{if } x \text{ is rational} \\ x^2 + x^3, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

अन्तराल $[0, 2]$ में निम्न फलन f के निम्न एवं उपरि समाकल ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ x^2 + x^3, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

5. Prove that every bounded (convergent) sequence has a convergent subsequence.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध (अभिसारी) अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम होता है।

Or

(अथवा)

Show that the following series is convergent :

$$\sum \left(\frac{n}{1+n} \right)^{n^2}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है :

$$\sum \left(\frac{n}{1+n} \right)^{n^2}$$

6. Test the convergence of the following integral :

निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Or

(अथवा)

Find the Fourier series for $f(x) = x \cos x$, $-\pi < x < \pi$.

फलन $f(x) = x \cos x$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. (a) Show that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

does not exist.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

विद्यमान नहीं है।

4

(b) State and prove the intermediate value theorem.

अन्तर्वेती-मान प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

2+6=8

8. (a) Prove that the function $f(x) = |x| + |x - 1|$ is continuous but not differentiable at $x = 0, 1$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$, $x = 0, 1$ पर सतत् किन्तु अवकलनीय नहीं है।

8

- (b) If $f(x) = f(\theta) + xf'(\theta) + \frac{x^2}{2!}f''(x\theta)$, and $f(x) = (1-x)^{5/2}$, then find the value of θ as $x \rightarrow 1$.

यदि $f(x) = f(\theta) + xf'(\theta) + \frac{x^2}{2!}f''(x\theta)$, तथा $f(x) = (1-x)^{5/2}$, तो θ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x \rightarrow 1$ ।

4

9. Let f be a bounded function defined on $[a, b]$; then $f \in R[a, b]$ iff given $\epsilon > 0$, there exists a partition $P \in P[a, b]$ such that :

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

फलन f , $[a, b]$ पर परिसीमित है, तो फलन f यदिदि समाकलनीय है जबकि प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए ऐसा विभाजन P विद्यमान है कि :

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \quad 6+6=12$$

10. (a) Test the convergence of the following series :

$$1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1} + \dots$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1} + \dots$$

- (b) Applying Cauchy's general principle of convergence to show that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent where :

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है जहाँ :

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \quad 6+6=12$$

11. (a) Test the convergence of the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{P-1}}{(1+x)} dx$$

समाकल $\int_0^{\infty} \frac{x^{P-1}}{(1+x)} dx$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

(b) Show that :

$$x = 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right], \quad 0 < x < \pi$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$x = 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right], \quad 0 < x < \pi$$

8+4=12