Roll No. : ......................................

Total No. of Questions : **11** ] [ Total No. of Printed Pages : **4**

# BEED–252

## B.Sc. B.Ed. (IInd Year) Examination, 2023

## MATHEMATICS

Paper – II (CC–5)

## (Real Analysis)

*Time : 3 Hours* ] [ *Maximum Marks : 50*

**Section–A** **(Marks : 1½ × 8 = 12)**

***Note*** :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1½** marks.

**(खण्ड–अ)** **(अंक : 1½ × 8 = 12)**

**नोट** :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1½** अंक का है।

**Section–B** **(Marks : 4 × 5 = 20)**

***Note*** :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

**(खण्ड–ब)** **(अंक : 4 × 5 = 20)**

**नोट** :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

**Section–C** **(Marks : 6 × 3 = 18)**

***Note*** :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **6** marks.

**(खण्ड–स)** **(अंक : 6 × 3 = 18)**

**नोट** :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है।

## Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) Define least upper bounded axiom of a function.

फलन का न्यूनतम उपरि परिबंध या उच्चक अभिग्रहित को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define uniform continuity.

एक समान सातत्यता को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write the statement geometrical interpretation of Cauchy's mean value theorem.

कॉशी मध्यमान प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ का कथन लिखिए।

(iv) Prove that the constant function :

$$f(x) = k, \forall x \in \mathrm{R}$$

is differentiable everywhere.

सिद्ध कीजिए कि अचर फलन :

$$f(x) = k, \forall x \in \mathrm{R}$$

में सर्वत्र अवकलनीय है।

(v) Define Darboux sums.

डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

(vi) Write the statement necessary and sufficient conditions for Riemann-Integrability.

रीमान–समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध का कथन लिखिए।

(vii) Define convergent sequence.

अभिसारी–अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define Drichlet's Test

डिरिचलिट परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

## Section–B (खण्ड–ब)

2. Prove that an ordered field is infinite field.

सिद्ध कीजिए कि क्रमित क्षेत्र एक अनन्त क्षेत्र होता है।

***Or* (अथवा)**

Prove that there is no rational number whose cube is 3.

सिद्ध कीजिए कि कोई परिमेय संख्या का अस्तित्व नहीं होता है जिसका घन 3 तीन हो।

3. Prove that the following function $f(x)$ is continuous at $x = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}(yx), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}(yx), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

***Or*** **(अथवा)**

Prove that the derivative of the following function $f(x)$ does not exist at $x = 1$.

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $f(x)$ का $x = 1$ पर अवकलज विद्यमान नहीं है।

4. If $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$, then prove that :

(i) $L(f, P) = \frac{13}{8}$

(ii) $U(f, P) = \frac{125}{32}$

यदि $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ तथा $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $L(f, P) = \frac{13}{8}$

(ii) $U(f, P) = \frac{125}{32}$

***Or*** **(अथवा)**

Prove that every monotonic function is Riemann-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

5. Test the convergence of the following integral :

निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{m-1} dx$$

***Or* (अथवा)**

Prove that every convergent-sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी-अनुक्रम परिबद्ध होता है।

6. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converges uniformaly on R.

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, R में एकसमान अभिसारी है।

***Or* (अथवा)**

Test the convergence of the integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}, a > 0$.

समाकल $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}, a > 0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

**Section–C (खण्ड–स)**

7. If $p$ and $q$ are rational and irrational numbers respectively, then prove that (i) $p + q$ and (ii) $pq$ $(p \neq 0)$ are irrational numbers.

यदि $p$ और $q$ क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्यायें हों, तो सिद्ध कीजिए कि (i) $p + q$ और (ii) $pq$ $(p \neq 0)$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।

8. State and prove Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

9. State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन-गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

10. Prove that the following series is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$ :

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी होगा यदि $x < 1$ तथा अपसारी होगा यदि $x \geq 1$ :

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. Test the convergence of the integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$.

समाकल $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।