

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

BEED-243

B.Sc. B.Ed. (IInd Year) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - I (CC-5)

(Abstract Algebra)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 60

Section-A

(Marks : $2 \times 8 = 16$)

Note :- Answer all *eight* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 2 marks.

(खण्ड-अ)

(अंक : $2 \times 8 = 16$)

नोट :- सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

Section-B

(Marks : $4 \times 5 = 20$)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : $4 \times 5 = 20$)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : $8 \times 3 = 24$)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 8 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : $8 \times 3 = 24$)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

BR-59

(1)

BEED-243 P.T.O.

Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) Define Equivalence Relation.
तुल्यता सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Subgroup.
उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Cyclic Group.
चक्रीय गुप को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Kernel of Homomorphism.
समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Quotient Group.
विभाग या खण्ड गुप को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define ring with zero divisor.
शून्य भाजक सहित वलय को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Simple Ring.
सरल वलय को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Quotient Ring.
विभाग (खण्ड) वलय को परिभाषित कीजिए।

Section–B (खण्ड–ब)

2. If a and b are any two elements of a group $(G, *)$, then the equations $a * x = b$ and $y * a = b$ have unique solutions in G .
यदि a तथा b किसी गुप $(G, *)$ के कोई दो अवयव हों, तो समीकरण $a * x = b$ तथा $y * a = b$ के गुप G में अद्वितीय हल होते हैं।

Or (अथवा)

Prove that $H = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ is subgroup of $(\mathbb{C}, +)$.

सिद्ध कीजिए कि $H = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ समूह $(\mathbb{C}, +)$ का उपसमूह है।

3. If $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = (2, 3, 4)$, prove that $pqp^{-1} = (p(2) p(3) p(4))$.

यदि $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = (2, 3, 4)$, तो सिद्ध कीजिए $pqp^{-1} = (p(2) p(3) p(4))$ ।

Or (अथवा)

If f is a homomorphism of a group G to a group G' with Kernel K , then K is a subgroup of G .

यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो, तो f की अष्टि K ग्रुप G का उपग्रुप होता है।

4. A subgroup N of a group G is normal subgroup iff $gNg^{-1} = N \forall g \in G$.

समूह (ग्रुप) G का उपसमूह (उपग्रुप) N एक विशिष्ट उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि $gNg^{-1} = N \forall g \in G$ है।

Or (अथवा)

Find the quotient group $\frac{G}{H}$ when $G = (z, +)$ and $H = (4z, +)$. Also prepare the

composition table of $\frac{G}{H}$.

विभाग समूह $\frac{G}{H}$ ज्ञात कीजिए जहाँ $G = (z, +)$ तथा $H = (4z, +)$ हैं। $\frac{G}{H}$ के लिए संक्रिया सारणी भी बनाइए।

5. For a ring R in which $a^2 = a, \forall a \in R$, prove that :

(i) $a + a = 0, \forall a \in R$ (ii) $a + b = 0, \Rightarrow a = b$

(iii) R is a commutative ring.

उस वलय के लिए जिसमें प्रत्येक $\forall a \in R$ के लिए $a^2 = a$ सही है, सिद्ध कीजिए :

(i) $a + a = 0, \forall a \in R$ (ii) $a + b = 0, \Rightarrow a = b$

(iii) R एक क्रमविनिमेय वलय है।

Or (अथवा)

Prove that the intersection of two subrings is also a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

6. If I_1 and I_2 be two ideals of a ring R , then prove that $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2 .

यदि I_1 तथा I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ भी एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 तथा I_2 दोनों अन्तर्विष्ट हैं।

Or (अथवा)

If $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$, $g(x) = 3 - 5x - 8x^3$ be two polynomials over a ring z of integers, then find :

(i) $f(x) + g(x)$

(ii) $f(x).g(x)$

यदि पूर्णाकों के वलय z पर बहुपद $f(x) = 2 + 3x - 4x^2$, $g(x) = 3 - 5x - 8x^3$ हो, तो :

(i) $f(x) + g(x)$

(ii) $f(x).g(x)$

के मान ज्ञात कीजिए।

Section-C (खण्ड-स)

7. If $(G, *)$ be a group, then :

(i) The identity of G is unique.

(ii) For all $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (Reversal law)

यदि $(G, *)$ एक ग्रुप है, तो :

(i) G का तत्समक अवयव अद्वितीय होता है।

(ii) $\forall a, b \in G$, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (उत्क्रमण नियम)

8. State and prove Cayley's theorem.

कैले प्रमेय का कथन व प्रमाण दीजिए।

9. If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G , then $H \cap N$ is a normal subgroup of H . Whereas $H \cap N$ need not be normal in G .

यदि ग्रुप G का एक उपग्रुप H है और N ग्रुप G का विशिष्ट उपग्रुप है, तो $H \cap N$ उपग्रुप H का एक विशिष्ट उपग्रुप होता है। जबकि $H \cap N$ का G में विशिष्ट उपग्रुप होना आवश्यक नहीं है।

10. Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field.

सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजकों से रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है।

11. An ideal I of a commutative ring R with unit is maximal if and only if the quotient ring $\frac{R}{I}$ is a field.

तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है, यदि और केवल यदि विभाग वलय $\frac{R}{I}$ एक क्षेत्र है।