Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

BEED–155

B.Sc. B.Ed. (Ist Year) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper – II (CC–5)

(Vector Geometry and Linear Algebra)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : **60***

Section–A **(Marks : 2 × 8 = 16)**

Note :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **2** marks.

(खण्ड–अ) **(अंक : 2 × 8 = 16)**

नोट :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 8 × 3 = 24)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **8** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 8 × 3 = 24)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **8** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Find the divergence of F, where :

$$F = xyzi + 3x^2yj + (xz^2 - y^2z)k$$

F का अपसरण ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$F = xyzi + 3x^2yj + (xz^2 - y^2z)k$$

(ii) Define a constant vector.

अचर सदिश की परिभाषा लिखिए।

(iii) Define Stokes' theorem.

स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए।

(iv) If :

$$r(t) = 5t^2i + tj - t^3k,$$

prove that :

$$\int_1^2 \left(r \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) dt = -14i + 75j - 15k$$

यदि $r(t) = 5t^2i + tj - t^3k$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_1^2 \left(r \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) dt = -14i + 75j - 15k$$

(v) Define subspace of a vector space.

सदिश समष्टि का उप-समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define basis and dimension.

आधार तथा विमा को परिभाषित कीजिए।

(vii) Show that every inner product space is a normal linear space.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक आंतर गुणन समष्टि मानकित सदिश समष्टि होती है।

(viii) Use Cramer's rule to find the solution of the following system of equations :

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

क्रेमर नियम का उपयोग कर निम्नलिखित प्रणाली समीकरण को हल कीजिए :

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$$

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If :

$$u = x + y + z,\ v = x^2 + y^2 + z^2,\ w = yz + zx + xy,$$

prove that :

$$(\text{grad } u) \,.\, \{(\text{grad } v) \times (\text{grad } w)\} = 0$$

यदि :

$$u = x + y + z,\ v = x^2 + y^2 + z^2,\ w = yz + zx + xy,$$

तो सिद्ध कीजिए :

$$(\text{grad } u) \,.\, \{(\text{grad } v) \times (\text{grad } w)\} = 0$$

Or

(अथवा)

A partical moves along the curve $r = a \cos ti + a \sin tj + btk$, where t is the time. Find the magnitude of its velocity and the tangential and normal components of its acceleration at any time.

एक कण वक्र $r = a \cos ti + a \sin tj + btk$ के अनुदिश गतिमान है, जहाँ t है। उसके वेग का परिमाण तथा स्पर्शरिखीय व अभिलम्बीय त्वरण ज्ञात कीजिए।

3. Find the directional derivative of $\phi = xy + yz + zx$ in the direction of vector $i + 2j + 2k$ at the point (1, 2, 0).

बिन्दु (1, 2, 0) पर $\phi = xy + yz + zx$ का दिक् अवकलज सदिश $i + 2j + 2k$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that :

$$\operatorname{div} \hat{r} = \frac{2}{r}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\operatorname{div} \hat{r} = \frac{2}{r}$$

4. Show that $\operatorname{div}(r \operatorname{grad} r^{-3}) = 3r^{-4}$:

Or

$$\nabla \cdot \left[r \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = \frac{3}{r^4}$$

प्रदर्शित कीजिए $\operatorname{div}(r \operatorname{grad} r^{-3}) = 3r^{-4}$:

अथवा

$$\nabla \cdot \left[r \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] = \frac{3}{r^4}$$

Or

(अथवा)

Show that the vector $V = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$ is irrotational.

प्रदर्शित कीजिए कि सदिश $V = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$ आघूर्णीय है।

5. Show that :

$$\int_s (axi + byj + czk).\hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$$

where s is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए $\int_s (axi + byj + czk).\hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$, जहाँ s गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है।

Or

(अथवा)

Evaluate :

$$\int_s F \cdot \hat{n}\, ds \text{, where } F = zi + xj - 3y^2zk$$

s is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ and $z = 5$.

$\int_s F \cdot \hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $F = zi + xj - 3y^2zk$ तथा s बेलन $x^2 + y^2 = 16$ का पृष्ठ है जो $z = 0$ और $z = 5$ के बीच अष्ट मांश है।

6. Show that the transformation mapping $f : V_2 R \rightarrow V_2R$ define by $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$ is not linear.

सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण प्रतिचित्रण $f : V_2 R \rightarrow V_2R$ जोकि $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$ से परिभाषित है, रैखिक नहीं है।

Or

(अथवा)

If $f(x)$ is a polynomial of degree 2 then prove that :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}[5f(0) - 5f(1) - f(2)]$$

यदि $f(x)$ 2 घात का बहुपद है तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}[5f(0) - 5f(1) - f(2)]$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. Evaluate :

$$\int_c (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$$

where C is the region bounded by the parabolas $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$ verify Green's theorem.

समाकल $\int_c (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ को $y = \sqrt{x}$ और $y = x^2$ से घिरे बन्द वक्र पर ज्ञात करके ग्रीन प्रमेय को तल के लिए सत्यापित कीजिए।

8. Find the orthonormal basis for $V_3(R)$ with standard inner product using Gram–Schmidt orthogonalization to the vector :

$$a_1 = (1, 0, 1),\ a_2 = (1, 2, -2),\ a_3 = (2, -1, 1)$$

ग्राम-स्मिट लाम्बिकरण प्रक्रम का उपयोग करके सदिशों :

$$a_1 = (1, 0, 1),\ a_2 = (1, 2, -2),\ a_3 = (2, -1, 1)$$

से मानक आंतर गुणन के सापेक्ष $V_3(R)$ के लिए प्रसामान्य लाम्बिक आधार ज्ञात कीजिए।

9. Find Eigenvalues and Eigenvector of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए।

10. Solve the following system of equation Gauss' Elimination method :

$$3x + 6y + z = 16$$

$$2x + 6y + 3z = 13$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

गॉस एलीमिनेशन विधि से हल कीजिए :

$$3x + 6y + z = 16$$

$$2x + 6y + 3z = 13$$

$$x + 3y + 2z = 9$$

11. In an inner product space V(F), prove that :

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

आंतर गुणन समिष्टि V(F) में सिद्ध कीजिए कि :

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$$