Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–304

B.A./B.Sc. (Part–III) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Algebra)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** marks.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. Define the following :

   निम्नलिखित की परिभाषा दीजिए :

   (i) Integral domain

   पूर्णांकीय प्रान्त

   (ii) Ring homomorphism

   रिंग समाकारिता

   (iii) Maximal ideal

   उच्चिष्ठ गुणजावली

   (iv) Remainder theorem

   शेषफल प्रमेय

   (v) Basis

   आधार

   (vi) Linear independence

   एकघात स्वतंत्र

   (vii) Dual space

   द्वैती समष्टि

   (viii) Linear transformation

   रैखिक प्रतिचित्रण

   (ix) Minimal polynomial

   अल्पिष्ट बहुपद

   (x) Diagonalizable matrix

   विकर्णीय आव्यूह

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Prove that the intersection of two subrings is again a subring.

सिद्ध कीजिए दो अवयवों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

Or

(अथवा)

Prove that the set S = $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ is a subfield of field (R, +, ×) of real numbers.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय S = $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र (R, +, ×) का एक उपक्षेत्र है।

3. Let f be a ring homomorphism from (R, +, ×) to (R, +, ×). Prove that (ker f, +, ×) is an ideal of (R, +, ×).

माना f, (R, +, ×) से (R, +, ×) में रिंग समाकारिता है। सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि (ker f, +, ×) रिंग R की गुणजावली होती है।

Or

(अथवा)

Find the quotient ring $\frac{R}{I}$, where I = $\{4n \mid n \in Z\}$ and R = (Z, +, ×).

विभाग वलय $\frac{R}{I}$ ज्ञात कीजिए जहाँ I = $\{4n \mid n \in Z\}$ तथा R = (Z, +, ×)।

4. Examine which of the following sets of vectors $\alpha = (a_1, a_2, ... a_n)$ in R″ are subspaces of R″. ($n \geq 3$)

(a) $\forall \alpha,\ a_1 + 3a_2 = a_3$

(b) $\forall \alpha,\ a_1 . a_2 = 0$

जाँच कीजिए कि R'' के निम्न सदिशों $\alpha = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ के समुच्चयों में से कौन-कौनसे R'' की उपसमष्टि है। $(n \geq 3)$

(अ) $\forall \alpha,\ a_1 + 3a_2 = a_3$

(ब) $\forall \alpha,\ a_1 . a_2 = 0$

Or

(अथवा)

Prove that the set $S = \{a + ib, c + id\}$ is a basis set of the vector space C(R) if and only if $ad - bc \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{a + ib, c + id\}$ सदिश समष्टि C(R) का एक आधार समुच्चय है यदि और केवल यदि $ad - bc \neq 0$।

5. If the mapping $T : V(F) \rightarrow V'(F)$ is one-one onto linear map, then show that $T^{-1} : V^1 \rightarrow V$ will also be a linear map.

यदि प्रतिचित्रण $T : V(F) \rightarrow V'(F)$ एकैकी आच्छादक रैखिक प्रतिचित्रण हो तो सिद्ध कीजिए कि $T^{-1} : V^1 \rightarrow V$ भी रैखिक प्रतिचित्रण होगा।

Or

(अथवा)

Find the matrix of a linear transformation T relative to their standard basis where T is defined as $T : V_2 \rightarrow V_3$ such that

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2, 7a_2)$$

रैखिक रूपान्तरण T की उनके मानक आधार के सापेक्ष मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए जहाँ T इस प्रकार परिभाषित है $T : V_2 \rightarrow V_3$ अत:

$$T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2, 7a_2)$$

6. Find the Eigen values and Eigen vectors of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स A के आइगेन मान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Or

(अथवा)

Show that similar matrices have the same minimal polynomial.

दिखाइए कि समरूप मैट्रिसेज के अल्पिष्ठ बहुपद भी समान होते हैं।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (i) Every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.

   प्रत्येक फील्ड (क्षेत्र) अनिवार्यतः प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

   (ii) Show that the set of real numbers of the form $m+n\sqrt{2},\ m, n \in Z$ with ordinary addition and multiplication of numbers forms a ring. Is it a field ?

   सिद्ध कीजिए कि $m+n\sqrt{2},\ m, n \in Z$ प्रकार की वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संख्याओं के योग एवं गुणा के लिए वलय है। क्या यह वलय एक क्षेत्र है ?

8. Show that an ideal I of a commutative ring R with unity is prime iff $\frac{R}{I}$ is an integral domain.

किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R की कोई गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदिदि $\frac{R}{I}$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

9. If W be a subspace of a finite dimensional vector space V(F), then :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि है, तो :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

10. (i) If T is a linear transformation defined from a vector space V(F) to V′(F) where V(F) is finite dimensional, then :

$$\text{Rank (T)} + \text{Nullity (T)} = \dim V$$

यदि T सदिश समष्टि V(F) से V′(F) में परिभाषित एक रैखिक रूपान्तरण है, जहाँ V(F) परिमित विमीय है, तो :

$$\text{Rank (T)} + \text{Nullity (T)} = \dim V$$

(ii) Prove that the following mapping defined from $V_2(R)$ to $V_3(R)$ are linear transformaton, for each find :

(a) Rank

(b) Nullity

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \ \forall \ a, b \in R$$

सिद्ध कीजिए कि $V_2(R)$ से $V_3(R)$ में परिभाषित निम्न प्रतिचित्रण रैखिक रूपान्तरण है। प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए :

(अ) कोटि

(ब) शून्यता।

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b) \ \forall \ a, b \in R$$

11. Show that the following matrix A is dragonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स A विकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$