Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

A–242

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : 68*

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) State the $m–n$ theorem.

   $m–n$ प्रमेय का कथन दीजिए।

   (ii) Define the limiting friction.

   सीमान्त घर्षण को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define the virtual work.

   कल्पित कार्य को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Write the Cartesian equation of the common catenary.

   सामान्य कैटिनरी का कार्तीय समीकरण लिखिए।

   (v) Define the Retardation.

   मंदन को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Write the relation between angular velocity and linear velocity.

   कोणीय वेग एवं रैखिक वेग में सम्बन्ध लिखिए।

   (vii) State Motion under Inverse Square Law.

   व्युत्क्रम वर्ग नियम के अधीन गति को लिखिए।

   (viii) Define Hooke's law for elastic strings.

   प्रत्यास्थ डोरियों के लिए हुक का नियम परिभाषित कीजिए।

   (ix) Write the polar equation of central orbit.

   संकेन्द्र कक्षा का ध्रुवीय समीकरण लिखिए।

   (x) State principle of conservation of momentum.

   संवेग संरक्षण सिद्धान्त का कथन दीजिए।

(xi) Write Kepler's laws of planetary motion.

ग्रहीय गति हेतु केप्लर नियम लिखिए।

(xii) Define Apsidal angle.

स्तब्धिका कोण को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If three forces acting at a point be in equilibrium, then each force is proportional to the sine of the angle between the other two.

किसी बिन्दु पर क्रियारत तीन बल यदि साम्यावस्था में हों तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के मध्य कोण के sine के समानुपातिक होता है।

Or

(अथवा)

A ladder whose C.G. divides it into two positions of lengths a and b rest with one end on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the coefficient of friction at the floor and the wall be respectively μ and μ', show that the inclination of the ladder to the floor, when equilibrium is limiting is :

$$\tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$$

एक सीढ़ी का गुरुत्व केन्द्र इसे दो भाग a और b में बाँटता है। सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है। यदि फर्श तथा दीवार का घर्षण गुणांक क्रमशः μ तथा μ' हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि सीमान्त संतुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव है :

$$\tan^{-1}\left\{\frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$$

3. The inclination of the tangents at the extremities of a portion of a common catenary be α and β and l the length of the portion. If the two extremities are on one side of catenary, show that the height of one extremity above the other is :

$$\frac{l \sin \frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}}$$

एक सामान्य कैटिनरी के l लम्बाई के एक भाग के सिरों पर स्पर्श रेखाओं के झुकाव α तथा β हैं। यदि दोनों सिरे कैटिनरी के एक ही ओर हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक सिरे की दूसरे सिरे से ऊँचाई है :

$$\frac{l \sin \frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}}$$

Or

(अथवा)

Equal forces act along the co-ordinate axes and along the straight line :

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

find the equations of the central axis of the system, where l, m, n are the d.c's.

समान बल निर्देश अक्षों तथा सरल रेखा :

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

के अनुदिश क्रियाशील हैं; निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ l, m, n दिक्कोज्याएँ हैं।

4. A small bead slides with constant speed v on a smooth wire in the shape of the cardioid $r = a\,(1 + \cos\theta)$. Show that its radial accelaration is always constant and angular velocity is $\frac{v}{2a}\sec\frac{\theta}{2}$.

एक छोटा मूँगा कार्डियोइड $r = a\,(1 + \cos\theta)$ के रूप वाले किसी तार पर अचर चाल v से फिसलता है। सिद्ध कीजिए कि इसका अरीय त्वरण सदैव अचर रहता है और कोणीय वेग $\frac{v}{2a}\sec\frac{\theta}{2}$ है।

Or

(अथवा)

A particle is moving with SHM. Its distances from the middle point of its path at three consecutive seconds are observed to be x_1, x_2, x_3. Prove that the time of a complete oscillation is :

$$2\pi / \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$$

एक SHM में पथ के मध्य बिन्दु से किसी कण के तीन उत्तरोत्तर सेकण्डों में दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हैं। सिद्ध कीजिए कि पूर्ण आवर्तकाल है :

$$2\pi / \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$$

5. A particle slides down a smooth cycloid starting from rest at the cusp. Show that when it arrives at the vertex, the pressure on the curve is equal to twice the wieght of the particle.

एक कण किसी चक्रज के उभयाग्र से विरामावस्था से रवाना होकर नीचे की ओर गिरता है। सिद्ध कीजिए कि जब वह शीर्ष पर पहुँचता है तो वक्र पर दाब कण के भार का दुगुना होता है।

Or

(अथवा)

A particle hangs from a point by a string of length *a*. It is projected horizontally with velocity *u* such that $u^2 = (2+\sqrt{3})ag$. Show that the string become slack when it has described on angle $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ with the vertical.

एक भारी कण *a* लम्बाई की रस्सी द्वारा किसी बिन्दु से लटकाया जाता है और फिर क्षैतिज दिशा में *u* वेग से, जहाँ $u^2 = (2+\sqrt{3})ag$, प्रक्षिप्त किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि डोरी उस समय ढीली होगी जब वह ऊर्ध्वाधर से $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ कोण तय कर चुकेगा।

6. The greatest and least velocities of a certain planet in its orbit round the sun are 30 and 29.2 km/sec. Find the eccentricity of the orbit.

किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर अपनी सकेन्द्र कक्षा में अधिकतम एवं न्यूनतम वेग क्रमशः 30 और 29.2 km/sec है। सकेन्द्र कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the force towards the pole when a particle describes the curve $r = a \sin n\theta$.

एक कण वक्र $r = a \sin n\theta$ निर्मित करता है, तो ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल ज्ञात कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. A uniform rod rests in a vertical plane with in a fixed hemispherical bowl whose radius is equal to the length of the rod. If μ is the coefficient of friction between the rod and the bowl, show that in limiting equilibrium the inclination of the rod to the horizontal is :

$$\tan^{-1}\left[4\mu/(3-\mu^2)\right]$$

कोई एकसमान छड़ किसी ऊर्ध्वाधर समतल में किसी स्थिर अर्धगोलीय प्याले में स्थित है जिसकी त्रिज्या छड़ की लम्बाई के तुल्य है। यदि छड़ और प्याले के मध्यस्थ घर्षण गुणांक μ हो, सिद्ध कीजिए कि सीमान्त संतुलन में छड़ का क्षैतिज से झुकाव है :

$$\tan^{-1}\left[4\mu/(3-\mu^2)\right]$$

8. A heavy uniform chain AB hangs freely under gravity with the end A fixed and the other end B attached by a light string BC to a fixed point C at the same level as A. The lenghts of the string and chain are such that the ends of the chain at A and B make angles of 60° and 30° respectively with the horizontal. Prove that the ratio of lengths of string and chain is $(\sqrt{3}-1):1$.

एक भारी एकसमान जंजीर AB गुरुत्वाकर्षण के अधीन लटकी हुई है, जिसका एक सिरा A पर स्थिर है तथा दूसरा सिरा B एक हल्की डोरी BC द्वारा बंधा हुआ है, जहाँ C बिन्दु A के समान स्तर पर स्थित है। जंजीर तथा डोरी की लम्बाइयाँ इस प्रकार है कि जंजीर के सिरे A तथा B क्षैतिज से क्रमश: 60° तथा 30° के कोण बनाते हैं। सिद्ध कीजिए कि डोरी तथा जंजीर की लम्बाइयों का अनुपात $(\sqrt{3}-1):1$ है।

9. If h be the height due to the velocity v at the earth's surface supposing its attraction constant and H be the corresponding height when the variation of gravity is taken into account. If r is the radius of the earth, then prove that :

$$\frac{1}{h}-\frac{1}{\text{H}}=\frac{1}{r}$$

यदि गुरुत्वाकर्षण को अचर माना जाये तो पृथ्वी तल से v वेग से फेंका हुआ कोई कण h ऊँचाई तक पहुँचता है और जब गुरुत्वाकर्षण में परिवर्तन को ध्यान में रखा जाये तो कण H ऊँचाई तक पहुँचता है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या r है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{h}-\frac{1}{\text{H}}=\frac{1}{r}$$

10. A heavy particle of mass m makes complete revolution in a smooth circular tube fixed in a verticle plane. Its greatest speed is n times its least speed. Prove that the pressure in the tube when the particle is moving vertically is $2mg\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ and that its speed, then is $\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+1)}$ times its speed at the highest point.

एक m द्रव्यमान वाला भारी कण ऊर्ध्वाधर तल में स्थिर एक चिकनी वृत्ताकार नली में पूरे चक्कर लगाता है। इसका महत्तम वेग न्यूनतम वेग का n गुना है। सिद्ध कीजिए कि जब कण ऊर्ध्वाधर दिशा में चलता रहता है तो उस समय नली में दाब $2mg\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)$ होता है तथा उस समय कण का वेग उच्चतम बिन्दु पर वेग का $\sqrt{\frac{1}{2}(n^2+1)}$ गुना है।

11. Find the law of force towards the pole under which the curve $r^n = a^n \cos n\theta$ can be described.

ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण वक्र $r^n = a^n \cos n\theta$ निर्मित करता है।