Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–218

B.A./B.Sc. (Part–II) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Write Cauchy's definition of continuity.

   सततता की कोशी की परिभाषा लिखिए।

   (ii) State the Mostest Theorem.

   मॉसटेस्ट प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

   (iii) Define differentiability of function of two variables.

   दो चर वाले फलन की अवकलनीयता को परिभाषित कीजिए।

   (iv) State Cauchy's mean value theorem.

   कोशी मध्यमान प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

   (v) Define Darbaux sums.

   डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

   (vi) State fundamental theorem of integral calculus.

   समाकलन गणित की मूल प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

   (vii) Define limit of a sequence.

   अनुक्रम की सीमा को परिभाषित कीजिए।

   (viii) Write Leibnitz's test for an alternating series.

   एकान्तर श्रेणी के लिए लीबनिट्ज़ का परीक्षण लिखिए।

   (ix) Define improper integral.

   अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिए।

   (x) Define Fourier series.

   फूरिये श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If a function f is continuous in closed interval $[a, b]$ and $f(a) \neq f(b)$, then prove that f assumes every values between $f(a)$ and $f(b)$ at least once in $[a, b]$.

यदि कोई फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है और $f(a) \neq f(b)$, तो सिद्ध कीजिए कि f उस अन्तराल में $f(a)$ तथा $f(b)$ के मध्य प्रत्येक मान को कम-से-कम एक बार ग्रहण करेगा।

Or

(अथवा)

Using definition of limit show that :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 + 2y = 5$$

सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 + 2y = 5$$

3. Prove that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at $x = 0$.

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु $x = 0$ पर सतत् है परन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Or

(अथवा)

If :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x + \theta h),$$

then find the value of θ, where $f(x) = (x - a)^{5/2}$, when $x = a$.

यदि :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x + \theta h)$$

तो θ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $f(x) = (x - a)^{5/2}$, जब $x = a$।

4. If $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$, then find $U(f, P)$ and $L(f, P)$.

   यदि $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ तथा $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$, तब $U(f, P)$ तथा $L(f, P)$ ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

If $f \in R[a, b]$, then show that $|f| \in R[a, b]$.

यदि $f \in R[a, b]$, तो दर्शाइए कि $|f| \in R[a, b]$।

5. Use the definition of limit of a sequence to prove that $\left\{\frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}\right\}$ converges to 3.

   अनुक्रम की सीमा की परिभाषा का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि $\left\{\frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}\right\}$, 3 को अभिसृत होती है।

Or

(अथवा)

Examine for convergence of the series :

$$\sum\left(\frac{n+1}{n^3}\right)x^n$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\sum\left(\frac{n+1}{n^3}\right)x^n$$

6. Test the convergence of Integral $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$, when $a \geq 0$.

समाकल $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$, $a \geq 0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Or

(अथवा)

Test the uniform convergence of the sequence $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$, $0 \leq x \leq 1$.

अनुक्रम $\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\}$, $0 \leq x \leq 1$ का एकसमान अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Discuss the nature of discontinuity of the following function at $x = 1$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n e^n}$$

निम्न फलन का $x = 1$ पर असतता का विवेचन कीजिए :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n e^n}$$

(b) If a function f is uniformly continuous on an interval E, then prove that f is continuous on E.

यदि फलन f अन्तराल E पर एकसमान सतत् है, तो सिद्ध कीजिए कि उस अन्तराल में f सतत् होगा। 8,4

8. (a) If a function f is differentiable in closed interval $[a, b]$ and k be a number between $f'(a)$ and $f'(b)$, then prove that there exists a number c in (a, b) such that $f'(c) = k$.

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में अवकलनीय है तथा $f'(a)$ व $f'(b)$ के मध्य कोई संख्या k है, तो सिद्ध कीजिए कि अन्तराल (a, b) में एक बिन्दु c विद्यमान होगा कि $f'(c) = k$ होगा।

(b) Apply Lagrange's mean value theorem to prove that :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \qquad \forall\, x > 0$$

लाग्रांज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x \qquad \forall\, x > 0$$ 8,4

9. (a) If $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, then prove that :

$$f \in \mathrm{R}[0, 1]$$

and $$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

यदि $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$f \in \mathrm{R}[0, 1]$$

तथा $$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

(b) Let f be a continuous function defined on interval $[a, b]$, then prove that $f \in \mathrm{R}[a, b]$.

यदि फलन f अन्तराल $[a, b]$ पर सतत् है, तो सिद्ध कीजिए कि $f \in \mathrm{R}[a, b]$। 8,4

10. (a) Test the convergence of the following series :

$$1+\frac{x}{2}+\frac{2!}{3^2}x^2+\frac{3!}{4^3}x^3+\frac{4!}{5^4}x^4+.....$$

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1+\frac{x}{2}+\frac{2!}{3^2}x^2+\frac{3!}{4^3}x^3+\frac{4!}{5^4}x^4+.....$$

(b) Let $<x_n>$ be a convergent sequence, then prove that its limit is unique.

$<x_n>$ एक अभिसारी अनुक्रम है, तो सिद्ध कीजिए कि इसकी सीमा अद्वितीय होगी। 8,4

11. Find the Fourier series of the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $(-\pi, \pi)$. Hence show that :

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.........$$

Also find the sum of the series when $x = \pm\pi$.

अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फलन $f(x) = x + x^2$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.........$$

$x = \pm\pi$ के लिए श्रेणी का योग भी ज्ञात कीजिए। 8+2+2=12