Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**]

[Total No. of Printed Pages : **7**

A–133

B.A./B.Sc. (Part–I) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 3 Hours]

[*Maximum Marks : 68*

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) If $\vec{r} = 5t^2\,\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\,\hat{k}$ and $s = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$, then find $\frac{d}{dt}(\vec{r}\,.\,\vec{s})$ at $t = \frac{\pi}{2}$.

यदि $\vec{r} = 5t^2\,\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\,\hat{k}$ तथा $s = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$, तो $t = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d}{dt}(\vec{r}\,.\,\vec{s})$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) Define Directional Derivative.

दिक्‌अवकलज परिभाषित कीजिए।

(iii) Define solenoidal vector.

परिनालिकीय सदिश परिभाषित कीजिए।

(iv) If $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ and $r = |\,\vec{r}\,|$, prove that $\text{curl}\,\vec{r} = 0$.

यदि $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ तथा $r = |\,\vec{r}\,|$ तो सिद्ध कीजिए कि $\text{curl}\,\vec{r} = 0$ ।

(v) If $\vec{r}(t) = t\,\hat{i} - t^2\,\hat{j} + (t-1)\,\hat{k}$ and $s(t) = 2t^2\,\hat{i} + 6t\,\hat{k}$, then find the value of $\int_0^2 (\vec{r}\,.\,\vec{s})dt$.

यदि $\vec{r}(t) = t\,\hat{i} - t^2\,\hat{j} + (t-1)\,\hat{k}$ तथा $s(t) = 2t^2\,\hat{i} + 6t\,\hat{k}$ हो, तो $\int_0^2 (\vec{r}\,.\,\vec{s})dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

(vi) State Gauss's Divergence theorem.

गॉस की अपसरण प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

(vii) Find the nature of the conic represented by the equation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$.

समीकरण $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शांकव की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

(viii) Write the general equation of circle in polar co-ordinates.

वृत्त का ध्रुवीय निर्देशांक के रूप में व्यापक समीकरण लिखिए।

(ix) Find the equation of sphere described on the point of P(2, –3, 4) and Q(–5, 6, –7) as diameter.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के अन्तिम बिन्दुओं के निर्देशांक P(2, –3, 4) तथा Q(–5, 6, –7) हैं।

(x) Find the equation of the cone whose vertex is the origin and base is the circle $x = a;\ y^2 + z^2 = b^2$.

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिन्दु तथा आधार वृत्त $x = a;\ y^2 + z^2 = b^2$ है।

(xi) Define Enveloping Cylinder.

अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।

(xii) Find the co-ordinates of the centre of the conicoid :

$$3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$$

शांकवज $3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$ के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Find the direction and magnitude of maximum directional derivative of $f = x^2yz^3$ at the point (2, 1, –1).

बिन्दु (2, 1, –1) पर किस दिशा में फलन $f = x^2yz^3$ का दिक्अवकलज अधिकतम है तथा इसका परिमाण क्या है ?

Or

(अथवा)

Prove that the curl of the gradient of u is zero.

सिद्ध कीजिए कि प्रवणता u की कुन्तल शून्य है।

3. Evaluate :

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$ and curve C is the arc of curve $y = x^2$ from (0, 0) to (3, 9) in the xy-plane.

$\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$ और वक्र C, xy-तल में $y = x^2$ पर (0, 0) से (3, 0) तक की चाप है।

Or

(अथवा)

Prove by Stokes' theorem :

$$\int_C \phi(\nabla\psi).d\vec{r} = \int_S (\nabla\phi \times \nabla\psi).\hat{n}\,dS$$

स्टोक्स प्रमेय से सिद्ध कीजिए :

$$\int_C \phi(\nabla\psi).d\vec{r} = \int_S (\nabla\phi \times \nabla\psi).\hat{n}\,dS$$

4. Find the length of latus-rectum of the parabola :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$$

परवलय $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$ के नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the condition that the straight line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may touch the circle $r = 2a\cos\theta$.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब सरल रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$, वृत्त $r = 2a\cos\theta$ को स्पर्श करती है।

5. Find the centre and radius of the circle :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25;$$

$$x + 2y + 2z + 9 = 0$$

वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 25;\ x + 2y + 2z + 9 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the equation of the cylinder, whose generators are parallel to the straight line $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is $x^2 + y^2 = 9;\ z = 1$.

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र $x^2 + y^2 = 9;\ z = 1$ है।

6. Find the equations of tangent planes to the conicoid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the straight line $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$.

रेखा $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$ से जाने वाले तथा शांकवज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ को स्पर्श करने वाले स्पर्श-तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the condition that the following lines must be polar lines with respect to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$:

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n};\ \frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma'}{n'}$$

शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के सापेक्ष निम्न सरल रेखाओं के ध्रुवीय रेखाएँ होने की शर्त ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n};\ \frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma'}{n'}$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k},\ r=|\vec{r}|$ and $\vec{a}$ is any constant vector, then prove that :

$$\text{curl}\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{\vec{a}}{r^3}+\frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}$$

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k},\ r=|\vec{r}|$ and $\vec{a}$ अचर सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl}\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{\vec{a}}{r^3}+\frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}$$

8. Verify divergence theorem for $\vec{F}=xy\hat{i}+z^2\hat{j}+2yz\hat{k}$ on the tetrahedron $x = y = z = 0,\ x + y + z = 1$.

चतुष्फलक $x = y = z = 0,\ x + y + z = 1$ पर $\vec{F}=xy\hat{i}+z^2\hat{j}+2yz\hat{k}$ के लिए अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

9. Trace the conic $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$.

शांकव $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

10. Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y - z + 2 = 0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ orthogonally.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $3x + 2y - z + 2 = 0$ को बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर स्पर्श करता है तथा गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ को लाम्बिक रूप से काटता है।

11. Show that the feet of normals from the point (α, β, γ) to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$ lie on the following sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a+\gamma)z - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\beta} y = 0$$

प्रदर्शित कीजिए कि परवलयज $x^2 + y^2 = 2az$ पर बिन्दु (α, β, γ) से खींचे गए अभिलम्बों के पाद निम्न गोले पर स्थित हैं :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a+\gamma)z - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\beta} y = 0$$