

Roll No. : .....

Total No. of Questions : 11 ]

[ Total No. of Printed Pages : 7

# A-128

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2023

## MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 3 Hours ]

[ Maximum Marks : 66

### Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

**Note :-** Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

**नोट :-** सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

### Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

**Note :-** Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

**नोट :-** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

### Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

**Note :-** Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

**नोट :-** पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

**BRI-203**

( 1 )

**A-128** P.T.O.

## Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Cardano's method.

कार्डोनो विधि को परिभाषित कीजिए।

- (ii) Define Descartes's method of signs.

देकार्तों का चिह्न नियम लिखिए।

- (iii) State Cayley-Hamilton theorem.

कैली-हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

- (iv) Find the characteristic equation of matrix A :

मैट्रिक्स A की अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (v) State Lagrange's theorem.

लैग्रान्जे प्रमेय का कथन लिखिए।

- (vi) Give an example of a cyclic group of order  $\geq 2$  in which every element except identity is its generator.

2 या 2 से बड़ी कोटि का एक चक्रीय गुप का उदाहरण दीजिए जिसमें तत्समक के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव जनक हो।

- (vii) Give definition of Homomorphism.

समाकारिता की परिभाषा लिखिए।

- (viii) Define normal subgroup.

प्रसामान्य उपगुप को परिभाषित कीजिए।

(ix) Find  $fg$ , when :

$fg$  ज्ञात कीजिए, जबकि :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(x) Find the order of element 2 of the group  $(\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$ .

ग्रुप  $(\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$  में अवयव 2 की कोटि ज्ञात कीजिए।

### Section-B

#### (खण्ड-ब)

2. If  $\alpha, \beta, \gamma$  be the roots of the equation  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  form the equation whose roots are  $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$ ,  $\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$  and  $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ .

यदि  $\alpha, \beta, \gamma$  समीकरण  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल  $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$ ,  $\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$  तथा  $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$  हैं।

Or

(अथवा)

Solve :

हल कीजिए :

$$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$$

3. (i) Define rank of a Matrix.

मैट्रिक्स की जाति को परिभाषित कीजिए।

(ii) Find the row rank of the matrix A :

मैट्रिक्स A की पंक्ति कोटि ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$$

*Or*

(अथवा)

(i) Show that  $A + A^T$  is symmetric matrix.

सिद्ध कीजिए  $A + A^T$  सममित मैट्रिक्स होती है।

(ii) For what value of  $k$ , the following system of equations has non-trivial solution ?

$k$  के किस मान के लिए समीकरण निकाय के सार्थक हल हैं :

$$2x + 3y + 4z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$4x + 6y + kz = 0$$

$$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$$

4. Prove that the union of two subgroups is a subgroup iff one is contained in the other.

प्रदर्शित कीजिए कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि एक उपग्रुप दूसरे में अन्तर्विष्ट हो।

*Or*

(अथवा)

Prove that any two left (right) cosets of a subgroup are either identical or disjoint.

सिद्ध कीजिए कि किसी उपग्रुप के कोई दो वाम (दक्षिण) सह-समुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त।

5. If  $H$  and  $K$  are two normal subgroups of a group  $G$ , then show that  $HK \triangleleft G$ .

यदि  $H$  और  $K$  किसी ग्रुप  $G$  के दो प्रसामान्य उपग्रुप हैं, तो प्रदर्शित कीजिए :

$$HK \triangleleft G$$

*Or*

(अथवा)

If  $f$  is a homomorphism from a group  $G$  to  $G'$  and if  $e$  and  $e'$  be their respective identities, then prove that :

एक समाकारिता हो तथा  $e$  तथा  $e'$  क्रमशः  $G$  और  $G'$  में तत्समक हों, तो सिद्ध कीजिए :

(a)  $f(e) = e'$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \forall a \in G$

6. If :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

compute the following :

(a)  $\alpha^{-1}$

(b)  $0(\alpha)$

यदि :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :

(अ)  $\alpha^{-1}$

(ब)  $0(\alpha)$

*Or*

(अथवा)

If  $a$  is the only element of order 2 in a group  $G$ , then show that :

$$ax = xa, \forall x \in G$$

किसी समूह  $G$  में यदि 2 कोटि का अवयव केवल  $a$  हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$ax = xa, \forall x \in G$$

## Section-C

(खण्ड-स)

7. (i) Solve the equation  $x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0$  by Cardon's method.  
समीकरण  $x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0$  का कार्डन विधि से हल कीजिए।
- (ii) Solve the equation  $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$  by Ferrari's method.  
समीकरण  $x^4 - 12x^3 + 41x^2 - 18x - 72 = 0$  को फ़ैरारी विधि से हल कीजिए। 6,6
8. Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the following matrix A :
- मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मान तथा उनके संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

9. (i) State and prove Fermat's theorem.  
फर्मा प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए। 6
- (ii) Find all the generator of cyclic group of order (a) 8, (b) 12.  
उन चक्रीय ग्रुप के सभी जनक ज्ञात कीजिए जिनकी कोटि (अ) 8, (ब) 12 हो। 3+3=6
10. Show that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.  
प्रदर्शित कीजिए कि किसी ग्रुप G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब; G के किसी विभाग ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

11. (i) Prove that :

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1) \rho(7) \rho(2) \rho(6) \rho(3) \rho(5) \rho(8) \rho(4))$$

where :

$$\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$$

and

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1) \rho(7) \rho(2) \rho(6) \rho(3) \rho(5) \rho(8) \rho(4))$$

जहाँ :

$$\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$$

तथा

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Define Transposition.

पक्षान्तरण को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define even and odd permutations.

सम और विषम क्रमचय को परिभाषित कीजिए।