Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

UGS–147

B.Sc. (Part–II) Due 1st Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Derivative of a constant vector.

अचर-सदिश के अवकलज को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Solenoidal Vector.

परिनालिकीय सदिश को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write the Cartesian form of Green's Theorem.

ग्रीन प्रमेय का कार्तीयरूप लिखिए।

(iv) Define Circulation.

परिसंचारण को परिभाषित कीजिए।

(v) Write the Cartesian form of volume-integral.

आयतन-समाकल का कार्तीय रूप लिखिए।

(vi) Write the general equation of a circle in Polar-Coordinates.

वृत्त का ध्रुवीय-निर्देशांकों के सामान्य समीकरण लिखिए।

(vii) Define nature of Conic.

शांकव की प्रकृति को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define tangent line and tangent plane of a sphere.

गोले की स्पर्श रेखा एवं स्पर्श समतल को परिभाषित कीजिए।

(ix) Define Enveloping Cone.

अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए।

(x) Define Right Circular Cylinder.

लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए।

(xi) Define Director Sphere.

नियामक-गोले को परिभाषित कीजिए।

(xii) Write the condition of tangency of $ax^2 + by^2 = 2cz$ paraboloids.

परवलज $ax^2 + by^2 = 2cz$ की स्पर्शता की शर्त लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. A particle moves along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$, where t is time. Find the component of its velocity and acceleration at time $t = 1$ in the direction $i + j + 3k$.

एक कण वक्र $x = t^3 + 1$, $y = t^2$, $z = 2t + 5$ के अनुदिश गतिमान है जहाँ t समय है। समय $t = 1$ पर सदिश $i + j + 3k$ की दिशा में कण के वेग एवं त्वरण के घटक ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Verify that :

$$\text{div curl F} = 0$$

where $F = x^2yi + xzj + 2yzk$.

सत्यापन कीजिए कि :

$$\text{div curl F} = 0$$

जहाँ $F = x^2yi + xzj + 2yzk$।

3. If $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ then prove that $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ = constant vector.

यदि $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ = अचर-सदिश।

Or

(अथवा)

Use Gauss's divergence theorem to show that :

$$\iint_S (xdydz + ydzdx + zdxdy) = 4\pi a^3$$

Where the surface S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

गॉस-प्रमेय की सहायता से प्रदर्शित कीजिए :

$$\iint_S (xdydz + ydzdx + zdxdy) = 4\pi a^3$$

जहाँ सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है।

4. Prove that the length of the semi-axes of the conic $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ are $\sqrt{\frac{d}{a+h}}$ and $\sqrt{\frac{d}{a-h}}$ respectively and their combined equation is $x^2 - y^2 = 0$.

सिद्ध कीजिए कि शांकव $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ की अर्धअक्षों की लम्बाइयाँ $\sqrt{\frac{d}{a+h}}$ तथा $\sqrt{\frac{d}{a-h}}$ होगी तथा उनका संयुक्त समीकरण $x^2 - y^2 = 0$ होगा।

Or

(अथवा)

Find the condition so that the straight line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may ba a tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$.

प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$ को स्पर्श करती है।

5. A plane passes through a fixed point (*a, b, c*) and cut the axes in A, B, C. Show that the locus of the centre of a sphere OABC is :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

एक समतल स्थिर बिन्दु (*a, b, c*) से गुजरता है एवं निर्देशी-अक्षों को बिन्दु A, B तथा C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दुपथ है :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

Or

(अथवा)

Prove that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $xy + yz + zx = 0$ in perpendicular lines if :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

सिद्ध कीजिए कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $xy + yz + zx = 0$ को परस्पर लम्बरेखाओं में काटेगा यदि :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

6. Find the locus of the equal conjugate diameters of the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के समान संयुग्मी व्यास का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

The plane $3x + 4y = 1$ is a diametral plane of the paraboloid $5x^2 + 6y^2 = 2z$. Find the equations to the chord through (3, 4, 5) which it bisects.

परवलज $5x^2 + 6y^2 = 2z$ का व्यासंग समतल $3x + 4y = 1$ है। बिन्दु (3, 4, 5) से जाने वाली तथा इस पर समद्विभाजित होने वाली जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Prove that the necessary and sufficient condition that $\vec{a}(t)$ is a vector of constant magnitude is :

$$\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश $\vec{a}(t)$ का परिमाण अचर होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

$$\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

(b) Prove that :

$$\text{curl grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl grad } u = \nabla \times (\nabla u) = 0$$

6+6=12

8. (a) Evaluate by Stoke's theorem :

$$\int_C (e^x dx + 2y\, dy - dz)$$

where C is the curve $x^2 + y^2 = 4$ and $z = 2$.

स्टॉक-प्रमेय द्वारा मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (e^x dx + 2y\, dy - dz)$$

जहाँ C वक्र $x^2 + y^2 = 4$ तथा $z = 2$ है।

(b) Evaluate :

$$\int_C [(3x^2 - 8y^2)\,dx + (4x - 6xy)\,dy]$$

where C is the region bounded by the parabolas $y^2 = x$ and $y = x^2$. Also verify Green's theorem.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C [(3x^2 - 8y^2)\,dx + (4x - 6xy)\,dy]$$

जहाँ C परवलय $y^2 = x$ तथा $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र है। ग्रीन प्रमेय का सत्यापन भी कीजिए। 6+6=12

9. (a) Trace the conic $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$.

शांकव $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

(b) Prove that the equations $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ and $\frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta$ represent the same conic.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$ तथा $\frac{l}{r} = -1 - e\cos\theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं। 8+4=12

10. (a) Find the limiting points of the system of coaxial spheres :

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 6 = 0$

निम्न गोलों से प्राप्त समाक्ष निकाय के सीमान्त बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 6 = 0$

(b) Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - 2y + 2z = 3$.

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक-वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x - 2y + 2z = 3$ है। 6+6=12

11. (a) The section of the enveloping cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ whose vertex is P by the plane $z = 0$ is a rectangular hyperbola. Find the locus of P.

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के शीर्ष P वाले अन्वालोपी शंकु का तल $z = 0$ से परिच्छेद आयतीय-अतिपरवलय है। P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the plane $8x - 6y - z = 5$ touches the Paraboloid $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2=z$ and find the coordinates of the points of contact.

प्रदर्शित कीजिए कि समतल $8x - 6y - z = 5$ परवलज $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2=z$ को स्पर्श करता है। इससे सम्पर्क बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। 8+4=12