Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

UGS–141

B.Sc. (Part–II) Due Ist Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Pedal equation of the curve.

वक्र के पदिक समीकरण को परिभाषित कीजिए।

(ii) Find the radius of curvature at the point (S, ψ) on the following curve :

$$S = c \log (\sec \psi + \tan \psi)$$

वक्र के बिन्दु (S, ψ) पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$S = c \log (\sec \psi + \tan \psi)$$

(iii) Write the statement of Eular's theorem on homogenious function.

समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय का कथन लिखिए।

(iv) If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ then find the value of :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ तो मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

(v) Define point of inflexion.

नति परिवर्तन बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Node and Cusp.

नोड और उभयाग्र को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Beta function.

बीटा फलन को परिभाषित कीजिए।

(viii) Evaluate :

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$$

(ix) Write the definition of quadrature.

क्षेत्रकलन की परिभाषा लिखिए।

(x) Write the definition of Intrinsic equation.

नैज समीकरण की परिभाषा लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Show that the envelope of the family of circles whose diameters are double ordinates of the parabola $y^2 = 4ax$ is the parabola $y^2 = 4a(x + a)$.

परवलय $y^2 = 4ax$ की द्विगुण कोटियों को व्यास मानकर वृत्त खींचे गये हैं। सिद्ध कीजिए कि उसका अन्वालोप परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ है।

Or

(अथवा)

Find the asymptote of the following curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

3. If :

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

यदि :

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Or

(अथवा)

If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ then find the value of $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

यदि $u^3 + v^3 = x + y$ तथा $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. Find the maximum and minimum value of the following function :

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

निम्न फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए :

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

Or

(अथवा)

Find the points of inflexion of the following curve :

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

निम्नलिखित वक्र के लिए नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

5. Evaluate :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(1+x^4)}{(1+x)^{10}} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(1+x^4)}{(1+x)^{10}} dx$$

Or

(अथवा)

Evaluate the following integral by changing the order of integration :

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx\, dy$$

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx\, dy$$

6. Find the area included between the following curve and its asymptote :

$$y^2(a - x) = x^3$$

निम्न वक्र तथा इसके अनन्तस्पर्शी के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$y^2(a - x) = x^3$$

Or

(अथवा)

Find the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ also prove that the arc of the upper half of the cardioid is bisected by $\theta = \frac{\pi}{3}$.

हृदयाभ (कार्डियोइड) $r = a(1 + \cos \theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए, यह भी सिद्ध कीजिए कि कार्डियोइड का ऊपरी अर्द्धभाग चाप $\theta = \frac{\pi}{3}$ से समद्विभाजित होता है।

Section–C

(खण्ड–स)

7. At any point P of the parabola $y^2 = 4ax$; prove that :

(i) $P = \frac{2a}{\sqrt{a}}(x+a)^{3/2} = \frac{2(SP)^{3/2}}{\sqrt{a}}$ (Where S is focus)

(ii) $(P_1)^{-2/3} + (P_2)^{-2/3} = (2a)^{-2/3} = (l)^{-2/3}$

where P_1 and P_2 are the radii of curvature at the ends of any focal chord and l in the length of the semi latus rectum.

परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु P पर सिद्ध कीजिए कि :

(i) $P = \frac{2a}{\sqrt{a}}(x+a)^{3/2} = \frac{2(SP)^{3/2}}{\sqrt{a}}$ (जहाँ S नाभि है)

(ii) $(P_1)^{-2/3} + (P_2)^{-2/3} = (2a)^{-2/3} = (l)^{-2/3}$

जहाँ P_1, P_2 किसी नाभि जीवा के सिरों पर वक्रता त्रिज्याएँ तथा l अर्द्ध नाभिलम्ब की लम्बाई है।

8. If $u = f(r)$, where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

यदि $u = f(r)$, जहाँ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

9. Trace :

$$y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$$

अनुरेखण कीजिए :

$$y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$$

10. Evaluate :

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2} dx$$

11. Evaluate :

$$\iiint_V 2z\, dx\, dy\, dz$$

where region of integration is a cone V bounded by the following :

$$x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\iiint_V 2z\, dx\, dy\, dz$$

जहाँ समाकलन क्षेत्र एक शंकु V है जो निम्न वक्रों से परिबद्ध है :

$$x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1$$