Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

UGS–136

B.Sc. (Part–II) Due 1st Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions (Answer limit **200** words). Each question has internal choice. Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C (Marks : 12 × 3 = 36)

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) (अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) If $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ are the roots of the equation $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n = 0$, $p_n \neq 0$, then find the value of $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+.....+\frac{1}{\alpha_n}$.

यदि $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ समीकरण $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n = 0$, $p_n \neq 0$ के मूल हैं तो $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+.....+\frac{1}{\alpha_n}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) Apply Descartes' rule of sign to find the nature of the roots of equation $x^4 + 16x^2 + 7x - 11 = 0$.

देकार्ते नियम का उपयोग करते हुए समीकरण $x^4 + 16x^2 + 7x - 11 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

(iii) Define row rank of a matrix.

किसी मैट्रिक्स की पंक्ति जाति परिभाषित कीजिए।

(iv) Write characteristic equation of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण लिखिए।

(v) State Lagrange's theorem.

लैंग्राजे प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

(vi) Define cyclic group.

चक्रीय समूह परिभाषित कीजिए।

(vii) State fundamental theorem on group morphism.

समूह समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

(viii) Define quotient group.

विभाग समूह परिभाषित कीजिए।

(ix) Define even permutation.

सम क्रमचय परिभाषित कीजिए।

(x) Define order of an element in a group.

समूह में अवयव की कोटि परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If two roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are equal, then prove that $pq = r$.

यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूल समान हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $pq = r$.

Or

(अथवा)

Solve the following reciprocal equation :

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

निम्न व्युत्क्रम समीकरण को हल कीजिए :

$$x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$$

3. Prove that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a Hermitian and a Skew-Hermitian matrix.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को एक हर्मिशियन तथा एक विषम हर्मिशयन मैट्रिक्स के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

Or

(अथवा)

For what value of k, the following system of equations has non-trivial solution :

$$2x + 3y + 4z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$4x + 6y + kz = 0$$

k के किस मान के लिए निम्न समीकरण निकाय का हल सार्थक है :

$$2x + 3y + 4z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$4x + 6y + kz = 0$$

4. Prove that intersection of two subgroups of a group is again a subgroup.

किसी समूह के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमूह होता है। सिद्ध कीजिए।

Or

(अथवा)

Show that the set $\{z \in C : |z| = 1\}$ is a multiplication group.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{z \in C : |z| = 1\}$ एक गुणात्मक समूह है।

5. If H is a subgroup of G and N Δ G, then prove that H $\cap$ N Δ H.

यदि H, समूह G का उपसमूह है तथा N Δ G, तो सिद्ध कीजिए कि H $\cap$ N Δ H.

Or

(अथवा)

Prove that a homomorphism f defined from a group G to a group G′ is a monomorphism if and only if Ker $f = \{e\}$, where e is the identity of G.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G से समूह G′ पर परिभाषित समाकारिता f, एकैक समाकारिता होती है, यदि और केवल यदि f की अष्टि $= \{e\}$, जहाँ e, G में तत्समक है।

6. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, then prove that $fg \neq gf$.

यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ तथा $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $fg \neq gf$.

Or

(अथवा)

Prove that the alternating group A_n of all even permutations of degree n is a normal subgroup of the symmetric group S_n.

सिद्ध कीजिए कि n अशांक के सभी सम क्रमचयों का एकान्तर समूह A_n, सममित समूह S_n का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Section–C

(खण्ड–स)

7. Solve by Cardon's method :

$$x^3 - 21x - 344 = 0$$

कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$x^3 - 21x - 344 = 0$$

8. Determine the eigen values and eigen vectors of the matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A के आइगेन मान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$ 3,9

9. Show the set of all matrices of the form :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in R$$

is an abelian group for matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in R$$

प्रकार के समी मेट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स गुणन के लिए आबेली समूह है।

10. Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G, if and only if the product of two right (left) cosets of H in G is again a right (left) coset of H in G.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का उपसमूह H एक प्रसामान्य उपसमूह होता है, यदि और केवल यदि H के किन्हीं **दो** दक्षिण (वाम) सहसमुच्चयों का गुणन H का एक दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय है।

11. If $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, then prove that :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

and also find the order of ρ.

यदि $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ तथा $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

तथा ρ की कोटि भी ज्ञात कीजिए। 10,2