Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

UGA–230

B.A. (Part–II) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Write the *m-n* theorem.

m-n प्रमेय लिखिए।

(ii) What do you mean by coefficient of friction ?

घर्षण गुणांक से आप क्या समझते हैं ?

(iii) Write the principle of virtual work for a system of coplanar forces acting at different points of a rigid body.

किसी दृढ़ पिण्ड के विभिन्न बिन्दुओं पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय के लिए कल्पित कार्य का सिद्धान्त लिखिए।

(iv) Write the equation of the central axis.

केन्द्रीय अक्ष का समीकरण लिखिए।

(v) Define Common Catenary.

सामान्य कैटेनरी को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define radial acceleration.

अरीय त्वरण की परिभाषा दीजिए।

(vii) What do you mean by amplitude of simple harmonic motion ?

सरल आवर्त गति के आयाम से क्या अभिप्राय है ?

(viii) Define Hooke's law for elastic strings.

प्रत्यास्थ डोरियों के लिए हुक के नियम की परिभाषा दीजिए।

(ix) Write intrinsic equation of a cycloid.

चक्रज का नैज समीकरण लिखिए।

(x) Define Central Orbit.

संकेन्द्र कक्षा को परिभाषित कीजिए।

(xi) Define aspidal distance.

स्तब्धिका दूरी को परिभाषित कीजिए।

(xii) State any one Kepler's law of planetary motion.

ग्रहीय गति हेतु केपलर के किसी एक नियम का कथन लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. A uniform beam of length $2a$ rest in equilibrium against smooth vertical wall and over a smooth peg at a distance b from the wall. If θ be the inclination of the beam to the vertical, show that $\sin^3 \theta = \frac{b}{a}$.

एक $2a$ लम्बी एकसमान छड़ एक चिकनी खूँटी के ऊपर तथा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे साम्यावस्था में है। यदि खूँटी दीवार से b दूरी पर हो तथा दीवार से छड़ कोण θ बनाती हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin^3 \theta = \frac{b}{a}$।

Or

(अथवा)

Prove that if a body be on the point of sliding down on inclined plane under its own weight then the inclination of the plane is equal to the angle of friction.

सिद्ध कीजिए कि यदि किसी आनत समतल पर रखा एक पिण्ड अपने भार के अन्तर्गत फिसलने की अवस्था में हो, तो समतल का क्षैतिज से झुकाव कोण, घर्षण कोण के बराबर होगा।

3. A telegraph wire is made of a given material and such a length l is stretched between two posts, distance d apart and of the same height, as will produce the least possible tension at the posts, show that $l = \left(\frac{d}{\lambda}\right) \sinh \lambda$, where λ is given by the equation $\lambda \tanh \lambda = 1$.

एक टेलीग्राफ तार एक ही धातु से बना है तथा इसकी l लम्बाई को समान ऊँचाई के d दूरी के दो खम्भों से खींचकर इस प्रकार बाँधा है कि खम्भों पर न्यूनतम तनाव होगा। प्रदर्शित कीजिए कि $l = \left(\frac{d}{\lambda}\right) \sinh \lambda$, जहाँ λ समीकरण $\lambda \tanh \lambda = 1$ से प्राप्त होगा।

Or

(अथवा)

Forces P, Q and R act along three non-intersecting edges of a cube. Find the central axis.

एक घन की तीन अप्रतिच्छेदित कोरों के अनुदिश P, Q एवं R बल क्रियाशील हैं। केन्द्रीय अक्ष ज्ञात कीजिए।

4. A particle moves in a catenary $s = c \tan \psi$ and the direction of its acceleration at any point makes equal angles with the tangent and normal to the path at any point. If the speed at the vertex ($\psi = 0$) be v at any other point, show that acceleration is $\frac{\sqrt{2}}{c} v^2 e^{2\psi} \cos^2 \psi$.

एक कण एक केटेनरी $s = c \tan \psi$ में चलता है और किसी भी बिन्दु पर इसके त्वरण की दिशा उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श एवं अभिलम्ब के साथ समान कोण बनाती है। यदि शीर्ष पर जहाँ $\psi = 0$, वेग v हो, तो सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर त्वरण $\frac{\sqrt{2}}{c} v^2 e^{2\psi} \cos^2 \psi$ होगा।

Or

(अथवा)

A horizontal shelf is moved up and down with SHM of period $\frac{1}{2}$ sec. What is the greatest amplitude admissible in order that a book placed on the shelf may not be jerked off?

एक क्षैतिज पटल (Shelf) $\frac{1}{2}$ सेकण्ड आवर्तकाल वाली SHM में ऊर्ध्वाधर दिशा में चल रहा है। इसका अधिकतम आयाम ज्ञात कीजिए जिससे उस पर रखी हुई कोई पुस्तक सर्वदा इसके सम्पर्क में रह सके।

5. An elastic string without weight of natural length l is such that its modulus of elasticity is the weight of n gms. It is hung by one end and its other end is attached with a body of M gms. Show that the time of a small vertical oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{ml}{ng}}$.

एक भारहीन प्रत्यास्थ डोरी जिसकी स्वाभाविक लम्बाई l तथा प्रत्यास्थ मापांक n ग्राम भार के बराबर है, एक सिरे से लटकाई जाती है और उसके दूसरे सिरे पर m ग्राम का एक पिण्ड लटकाया जाता है। सिद्ध कीजिए कि उदाग्र दोलन का समय $2\pi\sqrt{\frac{ml}{ng}}$ है।

Or

(अथवा)

A particle hanging vertically from a fixed point by means of a string of length l is projected horizontally with velocity $\sqrt{(6gl)}$. Prove that the tension of the string when the particle is at the end of a horizontal diameter is to its tension when the particle is at the highest point as 4 : 1.

एक भारी कण किसी स्थिर बिन्दु से l लम्बाई की एक डोरी द्वारा लटकाया गया है। यदि कण को $\sqrt{(6gl)}$ वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षिप्त किया जाये तो सिद्ध कीजिए कि जब कण क्षैतिज व्यास के सिरे पर तथा उच्चतम बिन्दु पर होता है तो डोरी में तनावों का अनुपात 4 : 1 रहता है।

6. A ball impings directly upon another ball at rest and is itself reduced to rest by impact. It half of the initial KE is destroyed in the collision; find the coefficient of restitution.

एक पिण्ड एक अन्य विरामावस्था के पिण्ड से संघट्ट करके स्वयं विरामावस्था में आ जाता है। यदि संघट्ट से आधी गतिज ऊर्जा नष्ट हो जाती है, तो प्रत्यानयन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the law of force towards the pole under which the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ can be described.

ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ निर्मित करता है।

Section–C

(खण्ड–स)

7. One end of a uniform rod is attached to a hinge and the other end is supported by a string attached to the extremity of the rod, and the rod and the string are inclined at the same angle θ to the horizontal. If W be the weight of the rod, show that the action at the hinge is $\left(\frac{W}{4}\right)\sqrt{(8+\text{cosec}^2\,\theta)}$ and is inclined at $\tan^{-1}(3\tan\theta)$ to the horizon.

एक एकसमान छड़ का एक सिरा कब्जे के सापेक्ष स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकता है और दूसरा सिरा एक रस्सी से बँधा है जो क्षैतिज से वही कोण θ बनाता है, जो छड़ बनाती है। यदि छड़ का भार W हो, तो सिद्ध कीजिए कि कब्जे की प्रतिक्रिया $\left(\frac{W}{4}\right)\sqrt{(8+\text{cosec}^2\,\theta)}$ होगी, जो क्षैतिज के साथ $\tan^{-1}(3\tan\theta)$ कोण पर झुकी होगी।

8. A heavy uniform rod of length $2a$, rests with its end in contact with two smooth inclined planes of inclinations α and β to the horizon. If θ be the inclination of the rod to the horizon, prove by the principle of virtual work :

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$$

$2a$ लम्बाई का एक भारी एकसमान छड़ क्षैतिज से α और β झुकावों के दो चिकने आनत समतल पर विरामावस्था में है, छड़ के सिरे इन आनत समतलों के सम्पर्क में हैं। यदि छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\tan\theta = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta)$$

9. A particle of mass m moving in a straight line is acted upon by an attractive force which is expressed by $\frac{m\mu x}{a}$ for $x < a$ and by $\frac{m\mu a^2}{x^2}$ for $x > a$ from a fixed origin in the line. If the particle starts from rest at a distance $2a$ from the origin, prove that it will reach the origin with a velocity $\sqrt{(2\mu a)}$ and the time taken is $\sqrt{\frac{a}{\mu}\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)}$.

m संहति के कण पर जो एक सरल रेखा में चल रहा है, जब $x < a$ तो एक आकर्षी बल $\frac{m\mu x}{a}$ कार्य करता है और जब $x > a$ तो बल $\frac{m\mu a^2}{x^2}$ कार्य करता है, जहाँ दोनों अवस्थाओं में x सरल रेखा में किसी स्थिर मूलबिन्दु से कण की दूरी है। यदि कण मूलबिन्दु से $2a$ दूरी पर विरामावस्था से रवाना हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह मूलबिन्दु पर $\sqrt{(2\mu a)}$ वेग से $\sqrt{\frac{a}{\mu}\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)}$ समय पर पहुँचेगा।

10. One end of an elastic string is fixed and to the other end is fastened a particle heavy enough to stretch the string to double its natural length a. The string is drawn vertically down till it is four times its natural length and then let go. Prove that the particle will return to this point in time :

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left[2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right]$$

एक प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा स्थिर है और इसके दूसरे स्थिर सिरे पर एक ऐसा कण बँधा हुआ है जिसका भार डोरी को उसकी स्वाभाविक लम्बाई a की दुगुनी लम्बाई तक बढ़ा देता है। डोरी ऊर्ध्वाधर दिशा में नीचे की ओर इतनी खींची जाती है कि वह अपनी स्वाभाविक लम्बाई की चार गुनी हो जाती है और फिर इसे छोड़ दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि कण उस बिन्दु पर निम्न समय पश्चात् लौटेगा :

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left[2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right]$$

11. A particle subject to central acceleration $\left(\frac{\mu}{r^3}\right)+f$ is projected from an apse at a distance a with velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ · Prove that at any subsequent time, $r=a-\frac{1}{2}ft^2$.

एक कण एक केन्द्रीय त्वरण $\left(\frac{\mu}{r^3}\right)+f$ द्वारा क्रियाशील है तथा a दूरी पर स्तब्धिका से वेग $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ से प्रक्षिप्त किया गया है। दिखाइए कि किसी समय तत्पश्चात् $r=a-\frac{1}{2}ft^2$ ।