Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

UGA–228

B.A. (Part–II) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define the limit of a function of *two* variables.

दो चरों के फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write down the types of discontinuity.

असांतत्यता के प्रकार लिखिए।

(iii) Show that the function $f(x, y) = xy + x + y^2$ is differentiable at the origin (0, 0).

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y) = xy + x + y^2$ मूल बिन्दु (0, 0) पर अवकलनीय है।

(iv) State Taylor's theorem for function of two variables.

दो चरों वाले फलन के लिए टेलर प्रमेय का कथन लिखिए।

(v) Write the definition of upper Riemann integral.

अपरि रीमान समाकल की परिभाषा लिखिए।

(vi) Prove that $\Sigma 4_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ is a divergent series.

सिद्ध कीजिए कि $\Sigma 4_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ एक अपसारी श्रेणी है।

(vii) Define real sequence.

वास्तविक अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(viii) Show that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

दिखाइए कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

(ix) Write the statement of Weierstrass M-Test.

वायस्ट्रास M-परीक्षण का कथन लिखिए।

(x) Define Fourier series of a functions $f(x)$.

फलन $f(x)$ के लिए फूरिये श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Let :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

Show that $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ does not exist.

मान लीजिए :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ का अस्तित्व नहीं है।

Or

(अथवा)

Examine for Continuity the following function at $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

निम्न फलन की $x = 0$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

3. Show that the following function f is continuous but not differentiable at $x = 2$:

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ 5-x, & x\geq 2\end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 2$ पर संतत है किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ 5-x, & x\geq 2\end{cases}$$

Or

(अथवा)

Verify Rolle's theorem for the following function in the intervals mentioned against them :

$$f(x) = x(x + 3)e^{-x/2},\ x \in [-3, 0]$$

निम्न फलन का उनके सम्मुख प्रदर्शित अन्तराल के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = x(x + 3)e^{-x/2},\ x \in [-3, 0]$$

4. Prove that every bounded function need not be R-integral.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध फलन आवश्यक रूप से R-समाकलनीय नहीं होता है।

Or

(अथवा)

State and prove mean value theorem of integral calculus.

समाकलन गणित के मध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर उसे सत्यापित कीजिए।

5. If x is positive, test the following series for convergence or divergence :

$$\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2 x^3+..........$$

यदि x धनात्मक हो, तो निम्न श्रेणी के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2 x^3+..........$$

Or

(अथवा)

If $\Sigma 4_n$ be a series of positive terms such that $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n} = \lambda$, then show that $\Sigma 4_n$ is divergent, when $\lambda > 1$.

यदि धन पदों की श्रेणी $\Sigma 4_n$ इस प्रकार है कि $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n} = \lambda$, तो प्रदर्शित कीजिए $\Sigma 4_n$ अपसारी है, जबकि $\lambda > 1$।

6. Test the convergence of the integral :

$$\int_a^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x^2} dx; a > 0$$

समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_a^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x^2} dx; a > 0$$

Or

(अथवा)

Evaluate the Fourier constant a_n for the following function :

$$f(x) \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

निम्न फलन के लिए फूरिए गुणांक a_n का मान ज्ञात कीजिए :

$$f(x) \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Using $\varepsilon - \delta$ technique, prove that :

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6$$

$\varepsilon - \delta$ तकनीक के प्रयोग से सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6$$

(b) If a function is continuous in a closed interval $[a, b]$; then it is bounded in that interval.

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत हो तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है

8. (a) Verify Lagrange's mean value theorem for the following function in the interval mentioned against them :

$$f(x) = |x|; [-1, 2]$$

प्रदर्शित अन्तराल में लाग्रांज मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = |x|; [-1, 2]$$

(b) Deduce from Cauchy's mean value theorem that :

$$f(b) - f(a) = cf'(c) \log(b/a)$$

where $f(x)$ is continuous and differentiable in $[a, b]$ and $a < c < b$.

कोशी मध्यमान प्रमेय से निगमन कीजिए :

$$f(b) - f(a) = cf'(c) \log(b/a)$$

जहाँ $f(x)$, $[a, b]$ में सतत् और अवकलनीय है और $a < c < b$।

9. If function $f(x) = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$ is the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, then $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

यदि फलन $f(x) = \sin x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ और $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$, अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ का विभाजन है तो $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$।

10. (a) Test the convergent and absolute convergence of the following series :

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\text{.........}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}+\text{.........}$$

निम्न श्रेणी के अभिसारत्व तथा निरपेक्ष अभिसारत्व की जाँच कीजिए :

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\text{.........}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}+\text{.........}$$

(b) Prove that every convergent sequence has a unique limit.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।

11. Find the Fourier series of the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $(-\pi, \pi)$ and show that :

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{.........}$$

Also find the sum of the series when $x = \pm\pi$.

फलन $f(x) = x + x^2, -\pi < x < \pi$ के लिए फूरिए श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए :

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{.........}$$

$x = \pm\pi$ के लिए श्रेणी का योग भी ज्ञात कीजिए।