Roll No : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

S–378

B.Sc. (Part–III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Advance Algebra)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks :* ***66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. Define the following :

निम्नलिखित की परिभाषा लिखिए :

(i) Characteristic of ring

रिंग का अभिलक्षण

(ii) Prime field

अभाज्य क्षेत्र

(iii) Maximal ideal

उच्चिष्ठ गुणजावली

(iv) Euclidean ring

यूक्लिडीयन रिंग

Define in respect of vector space :

सदिश समष्टि के सन्दर्भ में परिभाषा लिखिए :

(v) Linear span

एकघात विस्तृति

(vi) Dimension

विमा

Define the following :

निम्नलिखित की परिभाषा लिखिए :

(vii) Rank of a linear transformation

रैखिक रूपान्तरण की कोटि

(viii) Nullity of a linear transformation

रैखिक रूपान्तरण की शून्यता

(ix) Eigen value of a linear transformation

रैखिक रूपान्तरण का आइगन मान

(x) Minimal Polynomial

अल्पिष्ठ बहुपद

Section–B

(खण्ड–ब)

Unit–I

(इकाई–I)

2. Show that characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

दिखाइए कि पूर्णांकीय प्रांत का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या अभाज्य संख्या।

Or

(अथवा)

Let R be the set of real numbers and $a, b \in R$ if :

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \odot b = a + b + ab$$

Is $(R, \oplus, \odot)$ a field ? Prove it.

यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $a, b \in R$ तथा :

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \odot b = a + b + ab$$

क्या $(R, \oplus, \odot)$ एक क्षेत्र है ? सिद्ध कीजिए।

Unit–II

(इकाई–II)

3. Show that a field has no proper ideal.

दिखाइए कि क्षेत्र में उचित गुणजावली नहीं होती।

Or

(अथवा)

If :

$$f(x) = 3 + 5x - 7x^2$$

$$g(x) = 5 + 2x - 7x^3$$

are any two polynomials over the ring $(z_8, +_8, \cdot_8)$, find :

$$f(x) + g(x)$$

$$f(x)\, g(x)$$

यदि :

$$f(x) = 3 + 5x - 7x^2$$

$$g(x) = 5 + 2x - 7x^3$$

रिंग $(z_8, +_8, \cdot_8)$ में कोई दो बहुपद हों, तो ज्ञात कीजिए :

$$f(x) + g(x)$$

$$f(x)\, g(x)$$

Unit–III

(इकाई–III)

4. Is the set W = $\{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0, x, y, z \in R\}$ a subspace of vector space $V_3(R)$? Prove it.

क्या समुच्चय W = $\{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0, x, y, z \in R\}$ सदिश समष्टि $V_3(R)$ का उपसमष्टि है ? सिद्ध कीजिए।

Or

(अथवा)

Show that the set B = { (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, 2)} form a basis of $V_3(R)$.

दिखाइए कि समुच्चय B = { (1, 2, 1), (2, 1, 0), (1, –1, 2)}, $V_3(R)$ का आधार है।

Unit–IV

(इकाई–IV)

5. Let $f : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ be a linear transformation defined as $f(a, b) = (a - b, b - a, -a)$ $\forall$ $a, b \in R$. Find Range, Rank, Null Space, Nullity, where $V_2(R)$, $V_3(R)$ are vector spaces.

माना $f : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ पर रैखिक रूपान्तरण है तथा इस प्रकार $f(a, b) = (a - b, b - a, -a)$ $\forall$ $a, b \in R$ परिभाषित है, तो ज्ञात कीजिए परास, कोटि, शून्य समष्टि, शून्यता, जहाँ $V_2(R)$, $V_3(R)$ सदिश समष्टियाँ हैं।

Or

(अथवा)

Let W be a subspace of a vector space V(F), then show that annihilator of W is a subspace of V*.

यदि W सदिश समष्टि V(F) का कोई उपसमष्टि हो तो दिखाइए कि W की शून्यकारी V* की उपसमष्टि होती है

Unit–V

(इकाई–V)

6. Find the minimal polynomial of matrix A, where :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

मैट्रिक्स A का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Or

(अथवा)

If t is invertible linear transformation, then show that eigen values of t^{-1} are reciprocal of eigen values ot t.

यदि t एक प्रतिलोमी रूपान्तरण हो, तो दिखाइए कि t^{-1} के आइगन मान t के आइगन मानों के व्युत्क्रम होते हैं।

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Show that in a ring R :

$$a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b,\ a,\ b \in R$$

दिखाइए कि रिंग R में :

$$a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b,\ a,\ b \in R$$

(b) If ϕ is a homomorphism of ring R into S, then show that :

$$\phi(-a) = -\phi(a),\ a \in R$$

यदि ϕ रिंग R से S पर समाकारिता हो, तो दिखाइए :

$$\phi(-a) = -\phi(a),\ a \in R$$

8. Show that ring of Gaussian integers is a Euclidean ring.

दिखाइए कि गाउस पूर्णांकों का रिंग यूक्लिडीयन रिंग है।

9. Let W(F) be a subspace of finite dimensional vector space V(F), then show that :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

माना W(F) परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि है, तो दिखाइए :

$$\text{विमा } \frac{V}{W} = \text{विमा } V - \text{विमा } W$$

10. If t is a linear transformation from finite dimensional vector space V(F) to vector space V′(F), then show that :

$$\text{rank}(t) + \text{nullity}(t) = \dim V$$

यदि t परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) से सदिश समष्टि V′(F) पर रैखिक रूपान्तरण हो, तो दिखाइए :

$$\text{rank}(t) + \text{nullity}(t) = \dim V$$

11. Diagonalize the matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

मैट्रिक्स A को विकर्णीय रूप में बदलिए :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$