Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **8**

S–268

B.Sc. (Part–III) DUE IInd Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ) 1 each

1. (i) Define Trigonometric theorem or $m - n$ theorem.

त्रिकोणमितिय प्रमेय या $m - n$ प्रमेय को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Dynamic Friction.

गतिक घर्षण किसे कहते हैं ?

(iii) Write Cartesian equation of Common Catenary.

सामान्य कैटेनरी का कार्तीय समीकरण लिखिए।

(iv) Write equation of Central axis.

केन्द्रीय अक्ष का समीकरण लिखिए।

(v) Define Retardation.

मंदन को परिभाषित कीजिए।

(vi) Write formula of radial and transverse Acceleration.

अरीय व अनुप्रस्थ त्वरण के सूत्र लिखिए।

(vii) Define amplitude of Simple Harmonic Motion.

सरल आवर्त गति के आयाम को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define Cycloidal Motion.

चक्रजीय गति की परिभाषा लिखिए।

(ix) Write definition of central orbit.

सकेन्द्र कक्षा की परिभाषा लिखिए।

(x) Write Apsidal angle.

स्तब्धिका कोण को परिभाषित कीजिए।

(xi) Define Oblique Impact.

तिर्यक संघट्ट की परिभाषा लिखिए।

(xii) Write equation of motion under gravity of earth.

पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण के अधीन किसी कण की गति का समीकरण लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब) 4 each

2. A sphere of radius r rests against a smooth vertical wall to which it is attached by a string of length 'l' fastened to a point on the surface. Find the tension of the string.

एक r त्रिज्या का चिकना गोला एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे विरामावस्था में है। गोले की सतह के एक बिन्दु पर l लम्बाई की रस्सी बंधी है, जिसका दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु पर बंधा है। रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

One end of a heavy uniform rod AB can slide along a rough horizontal rod AC to which it is attached by a ring. B and C are joined by a string. When the rod is just on the point of slipping, the string is perpandicular to the rod which makes an angle α with the vertical. Prove that the coefficient of friction is given by :

$$\mu = \frac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}$$

एक भारी एवं एकसमान दण्ड AB का सिरा A, एक रूक्ष क्षैतिज दण्ड AC पर फिसल सकता है। B और C को एक डोरी द्वारा बांध दिया जाता है। जब AB फिसलने की अवस्था में होती है तो डोरी AB पर समकोण बनाती है और AB ऊर्ध्वाधर से कोण α बनाती है। सिद्ध कीजिए कि घर्षण गुणांक है :

$$\mu = \frac{\tan\alpha}{2+\tan^2\alpha}$$

3. Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius 'a' so as to be in contact with two thirds of the circumference of the pulley is :

$$a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$$

प्रदर्शित कीजिए कि एक बिना सिरे की बंद जंजीर जो त्रिज्या 'a' की एक वृत्ताकार घिरनी के 2/3 भाग के सम्पर्क में है, तो उसकी लम्बाई होगी :

$$a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$$

Or

(अथवा)

A string of length 'a' forms the shorter diagonal of a rhombus formed of four uniform rods, each of length 'b' and weight W, which are hinged together. If one of the rods be supported in a horizontal position, prove that tension of the string is :

$$\frac{2W\,(2b^2-a^2)}{b\sqrt{4b^2-a^2}}$$

'a' लम्बाई की एक डोरी चार एकसमान परस्पर जुड़े हुए दण्डों द्वारा बने समचतुर्भुज का छोटे वाला विकर्ण बनाती है जहाँ प्रत्येक दण्ड की लम्बाई 'b' तथा भार W है। यदि उनमें से एक दण्ड क्षैतिज स्थिति में आधारित किया गया हो, तो सिद्ध कीजिए डोरी में तनाव :

$$\frac{2W\,(2b^2-a^2)}{b\sqrt{4b^2-a^2}}$$

4. A point describe a circle of radius 'a' with a uniform speed v. Show that its radial and transverse accelerations are respectively $-\frac{v^2}{a}\cos\theta$, and $-\frac{v^2}{a}\sin\theta$ if a diameter is taken as initial line and one end of this diameter as pole.

एक बिन्दु एकसमान वेग v से 'a' त्रिज्या के वृत्त पर गतिमान है। सिद्ध कीजिए कि इसके अरीय व अनुप्रस्थ त्वरण क्रमशः $-\frac{v^2}{a}\cos\theta$ और $-\frac{v^2}{a}\sin\theta$ है, जबकि वृत्त का कोई एक व्यास प्रारम्भिक रेखा एवं इस व्यास का सिरा ध्रुव लिया जावे।

Or

(अथवा)

A particle is performing SHM of period T about a centre O and it passes through a point P distant b from O with velocity v in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is :

$$\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\frac{vT}{2\pi b}$$

यदि एक कण केन्द्र O के दोनों और T आवर्तकाल की SHM करे और वह किसी बिन्दु P (जिसके लिए OP = b) में से OP की दिशा में वेग v से गुजरे तो सिद्ध कीजिए कि वह पुनः P पर $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\frac{vT}{2\pi b}$ समय के पश्चात् लौटेगा।

5. Two bodies M and M′ are attached to the lower end of an elastic string whose upper end is fixed and are hung at rest, M′ fall off. Prove that the distance of M from the upper end of the string at time t is $a + b + c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$. Where '$a$' is the natural length of the string and b, c are extension of its length due to M and M′ respectively.

दो पिण्ड M और M′ एक प्रत्यास्थ डोरी के सिरे पर लटकाये जाते हैं, जिसका ऊपरी सिरा स्थिर है। जब पिण्ड विरामावस्था में हो तब M′ नीचे गिर जाता है। सिद्ध कीजिए कि समय t पर डोरी के ऊपर वाले सिरे से M की दूरी $a + b + c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t$ होगी। जहाँ 'a' डोरी की स्वाभाविक लम्बाई तथा b और c क्रमशः M तथा M′ पिण्डों को लगाने से डोरी के विस्तार हैं।

Or

(अथवा)

A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the heighest and lowest point of its path, show that $n = m + 6$.

W भार का एक कण जो किसी स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी द्वारा लटकाया हुआ है, एक ऊर्ध्वाधर तलीय वृत्त में चलता हैं। जब कण अपने पथ के उच्चतम तथा निम्नतम बिन्दुओं पर होता है तो डोरी में तनाव क्रमशः mW तथा nW होते हैं। सिद्ध कीजिए $n = m + 6$।

6. If v_1 and v_2 are velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

$$(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$$

यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के उस समय के वेग हो जबकि वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम दूरियों पर है, तो सिद्ध कीजिए :

$$(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$$

Or

(अथवा)

A ball falls from a height h upon a fixed horizontal plane. If e be the cofficient of restitution, and before it has finished rebounding, prove that whole distance travelled is :

$$h\left\{\frac{1+e^2}{1-e^2}\right\}$$

एक स्थिर क्षैतिज समतल पर एक गोला h ऊँचाई से गिरता है। यदि प्रत्यानयन गुणांक e हो तो सिद्ध कीजिए कि विरामावस्था में आने से पूर्व गोले द्वारा चलित कुल दूरी $h\left\{\frac{1+e^2}{1-e^2}\right\}$ है।

Section–C

(खण्ड–स) 12 each

7. If weightless string ABCDE is hanging from two fixed points A and E. Three particles of weight W each are hanging from B, C and D. The three portions AB, BC and CD of the string are inclined to the horizontal at angles α, β and γ respectively, then prove that :

$$2 \tan \beta = \tan \alpha - \tan \gamma$$

एक भारहीन डोरी ABCDE दो स्थिर बिन्दुओं A और E से लटक रही है। प्रत्येक W भार के तीन कण B, C और D पर लटक रहे हैं। डोरी के तीन भाग AB, BC तथा CD क्षैतिज के साथ क्रमशः कोण α, β तथा γ बनाते हैं, तो सिद्ध कीजिए :

$$2\tan\beta = \tan\alpha - \tan\gamma$$

8. Two equal forces act one along each of the straight lines :

$$\frac{x \pm a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\pm b\cos\theta} = \frac{z}{c}$$

Show that their central axis must, for all values of θ, lie on the surface :

$$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

दो समान बल प्रत्येक सरल रेखा के अनुदिश क्रियाशील है :

$$\frac{x \pm a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\pm b\cos\theta} = \frac{z}{c}$$

सिद्ध कीजिए कि θ के प्रत्येक मान के लिए उनकी केन्द्रीय अक्ष निम्न पृष्ठ पर स्थित होनी चाहिए :

$$y\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

9. If h be the height due to the velocity v at the earth's surface supposing its attraction constant and H be the corresponding height when the variation of gravity is taken into account. If r be the radius of earth, then prove that :

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\mathrm{H}} = \frac{1}{r}$$

यदि गुरुत्वाकर्षण को अचर माना जाये तो पृथ्वी तल से v वेग से फेंका हुआ कोई कण h ऊँचाई तक पहुँचता है और जब गुरुत्वाकर्षण में परिवर्तन को ध्यान में रखा जाये तो कण H ऊँचाई तक पहुँचता है। पृथ्वी की त्रिज्या r हो तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\mathrm{H}} = \frac{1}{r}$$

10. A particle oscillates from cusp to cusp in a smooth cycloid whose axis is verticle and vertex lowest. Show that the velocity at any point P is equal to the resolved part of the velocity at any vertex along the tangent at P.

एक कण एक चिकने चक्रज के उभयाग्र से उभयाग्र तक दोलन करता है। चक्रज का अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष निम्नतम है। सिद्ध कीजिए किसी बिन्दु P पर वेग, शीर्ष बिन्दु पर वेग का P पर स्पर्श रेखा की दिशा में घटक के बराबर है।

11. A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance a from the origin with velocity which is $\sqrt{2}$ times velocity for a circle of radius a. Show that the equation to its path is $r\cos\left(\theta/\sqrt{2}\right)=a$.

एक कण केन्द्रीय त्वरण के अन्तर्गत गतिमान है, जो मूलबिन्दु से दूरी 'a' के घन के व्युत्क्रमानुपाती है तथा इसे ऐसे वेग से फेंका जाता है जो 'a' त्रिज्या वाले वृत्त के लिए वेग का $\sqrt{2}$ गुणा है, तो सिद्ध कीजिए कि पथ का समीकरण $r\cos\left(\theta/\sqrt{2}\right)=a$ है।