Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

S–254

B.Sc. (Part–III) DUE IInd Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1 each

1. (i) Using $\in - \delta$ definition of limit, prove that :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

सीमा की $\in - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(ii) Write the Cauchy's definition of continuity.

सांतत्य की कौशी की परिभाषा लिखिए।

(iii) Prove that the following function f is not differentiate at $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 2 \\ 5 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 2 \\ 5 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

(iv) Write the statement of Rolle's theorem.

रोले प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

(v) Explain partition of closed interval.

संवृत्त अन्तराल के विभाजन को समझाइए।

(vi) Define Darboux Sums.

डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write the definition of convergent sequence.

अभिसारी अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।

(viii) Write D'Alembert's ratio test.

डी'एलेम्बर्ट का अनुपात परीक्षण लिखिए।

(ix) Prove that the following integral is convergent :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न समाकल अभिसारी है :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$

(x) Write the statement of Dirichlet's test.

डिरिचलेट परीक्षण का कथन लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

4 each

2. Evaluate :

$$\lim_{(x, y) \to (e, 1)} \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{(x, y) \to (e, 1)} \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

Or

(अथवा)

Show that the following function is discontinuous at (0, 0) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दिखाइए कि निम्न फलन (0, 0) पर असतत् है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Verify Lagrange's mean value theorem for the function :

$$f(x) = lx^2 + mx + n, \ [a, b]$$

निम्न फलन के लिये लैग्रांज मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = lx^2 + mx + n, \ [a, b]$$

Or

(अथवा)

Find Lagrange's remainder after n terms in the expansion :

$$\log(1 + x)$$

निम्न फलन के विस्तार में n पदों के पश्चात् लैग्रांज शेषफल ज्ञात कीजिए :

$$\log(1 + x)$$

4. If f be a real valued bounded function defined on $[a, b]$ and M and m are supremum and infimum of f in $[a, b]$; then prove that :

$$m(b - a) \le L(f, p) \le U(f, p) \le M(b - a) \ \forall \ p \in P[a, b]$$

यदि फलन f, $[a, b]$ पर परिभाषित परिसीमित वास्तविक फलन हो तथा M, m फलन f के $[a, b]$ में क्रमशः उच्चक एवं निम्नक हो तो सिद्ध कीजिए :

$$m(b - a) \le L(f, p) \le U(f, p) \le M(b - a) \ \forall \ p \in P[a, b]$$

Or

(अथवा)

Prove that every continuous function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि यदि प्रत्येक f, $[a, b]$ पर सतत् है तो $f \in R[a, b]$।

5. Prove that the sequence $<x_n>$ is convergent and $2 \le \lim x_n \le 3$, where :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n!}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी है तथा $2 \le \lim x_n \le 3$, जहाँ :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n!}$$

Or

(अथवा)

Prove that the following series is convergent :

$$\sum\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है :

$$\sum\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}$$

6. Test the convergence of the following integral :

$$\int_0^\infty \overline{e}\, x^2 dx$$

निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_0^\infty \overline{e}\, x^2 dx$$

Or

(अथवा)

Find the Fourier series for the following function :

$$f(x) = x, \; -\pi < x < \pi$$

निम्न फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x, \; -\pi < x < \pi$$

Section–C

(खण्ड–स) 12 each

7. (a) Using $\in - \delta$ definition of limit, prove that :

$$\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} (3x+2y) = 7$$

सीमा की $\in - \delta$ परिभाषा का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{(x,\, y)\to(1,\, 2)} (3x+2y) = 7$$

(b) Prove that if a function f is continuous in $[a, b]$ and $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs i.e. :

$$f(a)\,f(b) < 0 \text{ or } f(a) > 0 > f(b)$$

then there exist atleast on point $c \in (a, b)$ such that $f(c) = 0$

सिद्ध कीजिए यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् है तथा $f(a)$ और $f(b)$ विपरीत चिन्ह वाले हों :

$$f(a)\,f(b) < 0 \text{ or } f(a) > 0 > f(b)$$

तो अन्तराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c अवश्य विद्यमान होता है, जहाँ $f(c) = 0$।

8. (a) Show that the function $f(x, y)$ is not differentiate at origin :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

दिखाइए कि फलन $f(x, y)$ मूल बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Deduce from Cauchy's mean value theorem that :

$$f(b) - f(a) = c\,f'(c)\,\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

where $f(x)$ is continuous and differentiate in $[a, b]$ and $a < c < b$.

कॉशी मध्यमान प्रमेय से निगमन कीजिए :

$$f(b) - f(a) = c\,f'(c)\,\log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$f(x)$, $[a, b]$ में सतत् तथा अवकलनीय है और $a < c < b$।

9. Prove that if f is bounded and has only a finite number of points of discontinuity in $[a, b]$, then f is R-integrable over $[a, b]$.

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f, $[a, b]$ पर परिबद्ध है और फलन के असांतत्य बिन्दु इस अन्तराल में परिमित है तो फलन f, R–समाकलनीय हैं।

10. (a) Prove that :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+2^{1/2}+3^{1/3}+....+n^{1/n}\right]=1$$

सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+2^{1/2}+3^{1/3}+....+n^{1/n}\right]=1$$

(b) Examine the convergence of the following 'Hypergeometric series' :

$$1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2+.........$$

where a, b, c are all positive.

निम्न हाइपर ज्यामितीय श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2+.........$$

जहाँ a, b, c सभी धनात्मक हैं।

11. (a) Prove that the following series is uniformly convergent :

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+................,(-1<x<1)$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी एक समान अभिसारी है :

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+................,(-1<x<1)$$

(b) Obtain Fourier series for $f(x) = x \cos x, -\pi < x < \pi$.

फलन $f(x) = x \cos x, -\pi < x < \pi$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।