Roll No : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

S–172

B.Sc. (Part–III) DUE Ist Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks :* ***66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ) 1 each

1. (i) Define Asymptote.

अनन्त स्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write the condition of orthogonality of two polar curves.

दो ध्रुवीय वक्रों के लम्बकोणीय होने का प्रतिबंध लिखिए।

(iii) Write statement of Euler's theorem on Homogeneous functions.

समघात फलनों के लिये यूलर प्रमेय लिखिए।

(iv) Write the necessary and sufficient condition for dependence of functions.

फलनों की आश्रयता के लिये अनिवार्य एवं आवश्यक प्रतिबंध लिखिए।

(v) Define Double Point.

द्विक बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(vi) Find the angle between the radius vector and the tangent at any point of the following curve :

निम्न वक्र के किसी बिन्दु पर ध्रुवान्तर रेखा तथा स्पर्शरेखा के मध्य कोण ज्ञात कीजिए :

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

(vii) Define Quadrature.

क्षेत्रकलन को परिभाषित कीजिए।

(viii) Find the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

कार्डियोइड $r = a(1 + \cos \theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

(ix) Evaluate :

$$\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(x) Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx\, dy$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx\, dy$$

Section–B

(खण्ड–ब) 4 each

2. Find the pedal equation of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$

कार्डियोइड $r = a(1 - \cos \theta)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the envelope of the family of the following straight lines; α being the parameter :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

निम्नलिखित सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

3. If $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$, then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

यदि $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$, तो सिद्ध कीजिए :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

Or

(अथवा)

If $u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$, $u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$ and $u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$, then show that :

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$

यदि $u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$, $u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$ और $u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$, तो प्रदर्शित कीजिए :

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$

4. Find the maximum or minimum value of the following function :

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y}$$

फलन $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y}$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the point of inflexion of the curve :

$$y(a^2 + x^2) = x^3.$$

वक्र $y(a^2 + x^2) = x^3$ के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

5. Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} = \beta(m,n)$$

Or

(अथवा)

Integrate $r \sin \theta$ over the area of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.

कार्डियोइड $r = a(1 + \cos \theta)$ के आरम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर $r \sin \theta$ का समाकलन कीजिए।

6. Find the area common to the following curves :

$$y^2 = ax \text{ and } x^2 + y^2 = 4ax$$

वक्रों $y^2 = ax$ तथा $x^2 + y^2 = 4ax$ का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}(x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy\,dz$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Find the radius of curvature at the point $\left(\frac{3a}{\alpha}, \frac{3a}{\alpha}\right)$ on the folium $x^3 + y^3 = 3axy$.

फोलियम $x^3 + y^3 = 3axy$ के बिन्दु $\left(\frac{3a}{\alpha}, \frac{3a}{\alpha}\right)$ पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(b) Find the asymptotes of the curve :

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y - 3 = 0$$

वक्र $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y - 3 = 0$ की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए। 6+6=12

8. Find the minimum value of :

$$x^2 + y^2 + z^2$$

when :

$$ax + by + cz = p$$

न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + y^2 + z^2$$

जबकि :

$$ax + by + cz = p$$ 12

9. (a) If $u = \log (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$$

यदि $u = \log (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$$

(b) If :

$$u=x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

then prove that :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

यदि :

$$u=x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

तो सिद्ध कीजिए :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ 6+6=12

10. Find the surface of the solid generated by the Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ when it revolves about :

(a) Initial line

(b) Tangent at the pole

द्विपाशी $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ से जनित घनाकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जब यह निम्न के परित: परिक्रमण करे :

(अ) आरम्भिक रेखा

(ब) ध्रुव पर स्पर्शी 6+6=12

11. Show that :

$$\int_{\partial}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Hence deduce that :

$$\int_{\partial}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^{n+1}}$$

प्रदर्शित कीजिए :

$$\int_{\partial}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

निगमन कीजिए :

$$\int_{\partial}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a^{n+1/2}} \cdot \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^{n+1}}$$ 9+3=12