

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

S-164

B.Sc. (Part-III) Due Ist Year Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-540

(1)

S-164 P.T.O.

Section-A (खण्ड-अ)

1 each

1. (i) Write the Descartes's Rule of signs.
देकार्त का चिह्न नियम लिखिए।
- (ii) Write the relations between Roots and Coefficients of equation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$.
समीकरण $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ के मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध लिखिए।
- (iii) Define Conjugate Matrix.
संयुग्मी मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Write the Condition of Consistency.
संगतता की शर्त लिखिए।
- (v) Define Proper and Improper of a Subgroup.
उचित एवं विषम उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Abelian group.
आबेली समूह को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Quotient group.
विभाग समूह को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Isomorphism.
तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define Even and Odd Permutations.
सम तथा विषम क्रमचयों को परिभाषित कीजिए।
- (x) Define order of an element of a group.
समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

Section-B (खण्ड-ब)

4 each

2. Solve the equation $x^3 - 13x^2 + 15x + 189 = 0$ having given that one root exceeds the order by 2.
समीकरण $x^3 - 13x^2 + 15x + 189 = 0$ को हल कीजिए, जहाँ यह दिया हुआ है कि एक मूल दूसरे मूल से 2 अधिक है।

Or (अथवा)

Find the equation whose roots are reciprocals of the roots of the following equation :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$$

उस समीकरण को ज्ञात कीजिए जिसके मूल निम्न समीकरण के मूलों के व्युत्क्रम हैं :

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 2 = 0$$

3. Find the rank of the Matrix A, where :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A की जाति ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Or (अथवा)

For what value of k , the following system of equations has non-trivial solution?

k के किस मान के लिए निम्न समीकरण निकाय का सार्थक हल है ?

$$2x + 3y + 4z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$4x + 6y + kz = 0$$

4. Find all the cosets of $H = \{0, 4\}$ in the group $G = (z_8, +_8)$.

समूह $G = (z_8, +_8)$ में $H = \{0, 4\}$ के सभी सहसमुच्चयों को ज्ञात कीजिए।

Or (अथवा)

If $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ and \circ is the operation defined in G as follows; then show that (G, \circ) is a non-abelian group :

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$$

यदि $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ तथा \circ , G में निम्न प्रकार से परिभाषित संक्रिया हो, तो सिद्ध कीजिए कि (G, \circ) एक अनआबेली समूह है :

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$$

5. Show that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूह का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Or (अथवा)

Prove that the following groups are isomorphic groups :

$$[\{0, 1, 2, 3\}, +_4] \text{ and } [\{1, 2, 3, 4\}, \times_5]$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न समूह तुल्यकारी समूह है :

$$[\{0, 1, 2, 3\}, +_4] \text{ तथा } [\{1, 2, 3, 4\}, \times_5]$$

6. Show that the set $A_3 = \{(a), (abc), (acb)\}$ of even permutations of the set $\{a, b, c\}$ is a group for the product of permutations.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{a, b, c\}$ के सम-क्रमचयों का समुच्चय $A_3 = \{(a), (abc), (acb)\}$ क्रमचय गुणन के लिए एक समूह है।

Or (अथवा)

Show that the order of an elements of a group $(G, *)$ is equal to that of its inverse a^{-1} i.e. $o(a) = o(a^{-1})$.

सिद्ध कीजिए कि समूह $(G, *)$ में किसी अवयव a की कोटि उसके प्रतिलोम की कोटि के बराबर होती है, अर्थात् :

$$o(a) = o(a^{-1})$$

Section-C (खण्ड-स)

7. Solve the following equation by Cardon's method :

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$

निम्न समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए :

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$

12

8. Reduce the following Matrix A in the normal form and find its rank :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स A को अभिलम्ब रूप में समानीत कर इसकी जाति को ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

12

9. Show that if a, b are elements of a group G , then the equation $ax = b$ and $ya = b$ have unique solution in G .

सिद्ध कीजिए कि यदि a और b किसी समूह G के अवयव हों, तो समीकरण $ax = b$ तथा $ya = b$ के G में अद्वितीय हल होते हैं।

12

10. State and prove main theorem on Quotient Groups.

विभाग समूह का प्रमुख प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

3,9

11. Find $\rho^{-1}\sigma\rho$ when :

$$\sigma = (1354) (268) (97); \rho = (8976) (541) (23)$$

Also find :

(i) $\rho^{-1}\sigma\rho$ is even or odd permutation.

(ii) its order.

$\rho^{-1}\sigma\rho$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि :

$$\sigma = (1354) (268) (97); \rho = (8976) (541) (23)$$

तथा निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\rho^{-1}\sigma\rho$ सम अथवा विषम क्रमचय हैं।

(ii) कोटि भी ज्ञात कीजिए।

8,2,2