

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

SA-336

B.A./B.Sc. (Part-III) Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Analysis)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन करें (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-1479

(1)

SA-336 P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define complete ordered field.
पूर्ण क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define a closed set.
संवृत समुच्चय की परिभाषा दीजिए।
- (iii) Define Cauchy sequence in a metric space.
दूरीक समष्टि में कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define a contracting mapping.
संकुचित प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define totally bounded space.
पूर्णतः परिबद्ध समष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Write statement of Jordan curve theorem.
जॉर्डन वक्र प्रमेय का प्रकथन कीजिए।
- (vii) Define Harmonic function.
प्रसंवादी फलन को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Bilinear Transformation.
द्विरैखिक रूपान्तरण को परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define open sphere in a metric space.
दूरीक समष्टि में विवृत गोलक को परिभाषित कीजिए।
- (x) Write a general equation of a circle in complex form.
सम्मिश्र रूप में वृत्त का समीकरण लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Show that between any two different real numbers, there lie an infinite number of rational numbers.

दर्शाइए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

Or

(अथवा)

Show that an ordered field is an infinite field.

दर्शाए कि क्रमित क्षेत्र अनन्त क्षेत्र होता है।

3. If $\forall x, y \in \mathbb{R}, d(x, y) = 2|x - y|$, then show that d is a metric in \mathbb{R} .

यदि $\forall x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $d(x, y) = 2|x - y|$, तो दर्शाए कि d, \mathbb{R} में एक दूरीक है।

Or

(अथवा)

Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

4. Prove that the image of a Cauchy sequence under a uniform continuous map is a Cauchy sequence.

सिद्ध कीजिए कि कॉशी अनुक्रम का एकसमान सतत् फलन के सापेक्ष प्रतिबिम्ब भी कॉशी अनुक्रम होता है।

Or

(अथवा)

Let X, Y and Z be three metric spaces and $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ be continuous function then prove that $gof: X \rightarrow Z$ is also continuous.

यदि X, Y और Z तीन दूरीक समष्टियाँ हैं तथा $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ दोनों सतत् फलन हैं तब सिद्ध कीजिए कि $gof: X \rightarrow Z$ भी एक सतत् फलन होगा।

5. Prove that the function $e^{i(\cos y + i \sin y)}$ is analytic and find its derivative.

सिद्ध कीजिये कि फलन $e^{i(\cos y + i \sin y)}$ विश्लेषिक फलन है तथा इसका अवकलज भी ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that $f(z) = \bar{z}$ is not differentiable at any point.

सिद्ध कीजिए कि $f(z) = \bar{z}$ किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

6. Prove that the function $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ is harmonic and obtain its conjugate.
सिद्ध कीजिए कि फलन $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ प्रसंवादी है तथा इसका संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the fixed points and the normal form of the following bilinear transformation :

$$w = \frac{3z-4}{z-1}$$

द्विरैखिक रूपान्तरण $w = \frac{3z-4}{z-1}$ के स्थिर बिन्दु तथा सामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. Prove that every infinite bounded set has a limit point.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।
8. State and prove Baire category theorem.
बेयर संवर्ग प्रमेय का प्रकथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
9. State and prove Banach's fixed point theorem.
बानाख स्थिर बिन्दु प्रमेय का प्रकथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
10. Prove that the function $f(z) = |Z|^2$ is continuous everywhere but its derivative exists only at the origin.
सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |Z|^2$ सर्वत्र सतत् है किन्तु इसके अवकलज का अस्तित्व केवल मूल बिन्दु पर ही है।
11. Prove that the bilinear transformations maps circles or straight lines onto circles or straight lines.
सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण वृत्तों या सरल रेखाओं को वृत्तों या सरल रेखाओं में प्रतिचित्रण करता है।