Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SA–313

B.A./B.Sc. (Part–III) Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Advance Algebra)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define commutative ring and give an example.

   क्रमविनिमेय वलय को परिभाषित कीजिए तथा एक उदाहरण भी दीजिए।

   (ii) Define embedding of a ring into another ring.

   एक वलय का दूसरी वलय में अन्तःस्थापन को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define polynomial over a ring.

   वलय पर बहुपद को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Define Euclidean ring.

   यूक्लिडीय वलय को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define Linear Span.

   एकघातीय विस्तृति को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define basis of a vector space.

   सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define isomorphism of vector space.

   सदिश समष्टियों की तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।

   (viii) Define range space of a linear transformation.

   रैखिक रूपान्तरण की परास समष्टि को परिभाषित कीजिए।

   (ix) Define minimal polynomial.

   अल्पिष्ठ बहुपद को परिभाषित कीजिए।

   (x) Prove that square matrix A and A^T have the same eigenvalues.

   सिद्ध कीजिए कि वर्ग मैट्रिक्स A तथा A^T के आइगेनमान समान होते हैं।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. If a be a fixed element of a ring R, then prove that :

   $S = \{x \in R \mid xa = 0\}$ is a left ideal of R.

   $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ is a right ideal of R.

   यदि a किसी वलय का एक निश्चित अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

   $S = \{x \in R \mid xa = 0\}$ R में एक वाम गुणजावली है।

   $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ R में एक दक्षिण गुणजावली है।

Or

(अथवा)

If a be an element of a commutative ring R with unity, then prove that the set $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$ is a principal ideal of R generated by a.

यदि a किसी तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R एक एक अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$ a द्वारा जनित R में एक मुख्य गुणजावली है।

3. Prove that every field is a Euclidean ring.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र यूक्लिडीय वलय होता है।

Or

(अथवा)

If $F[x]$ is a polynomial domain over a field F, then prove that the polynomial $f(x) \in F[x]$ is divisible by $(x - c)$ for an arbitrary $c \in F$ iff $f(c) = 0$.

यदि क्षेत्र F पर $F[x]$ एक बहुपद डोमेन है, तो सिद्ध कीजिए कि बहुपद $f(x) \in F[x]$, एक स्वेच्छ $c \in F$ के लिए बहुपद $(x - c)$ से विभाज्य है, यदिदि $f(c) = 0$।

4. Prove that the linear sum of two subspaces of a vector space is also a subspace.

   सिद्ध कीजिए किसी सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

Or

(अथवा)

If V(R) be the vector space over the real field R of all 2×2 matrices and :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

be a basis of it, then find the coordinates of $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ relative to this basis.

यदि R(V) वास्तविक क्षेत्र R पर 2×2 आव्यूह को सदिश समष्टि है तथा

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

इसका एक आधार है तो इस आधार के सापेक्ष $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5. Prove that the rank of the product of two matrices never exceeds the rank of either matrix.

सिद्ध कीजिए कि दो आव्यूहों के गुणन की जाति उनमें से किसी भी आव्यूह की जाति से कभी भी अधिक नहीं होती है।

Or

(अथवा)

If W is a subspace of V(F), then show that :

$$A(A(W)) = W = W^{\circ\circ}$$

यदि W, सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि हो, तो दर्शाइए कि :

$$A(A(W)) = W = W^{\circ\circ}$$

6. Prove that the set of all characteristic vectors associated with a characteristic value λ of t by adjoining zero vector to it is a subspace of V(F).

सिद्ध कीजिए t के अभिलाक्षणिक मान λ के संगत सभी अभिलाक्षणिक सदिशों के समुच्चय में शून्य सदिश सम्मिलित करने पर V(F) की उपसमष्टि होती है।

Or

(अथवा)

Diagonalize the following symmetric matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित सममित आव्यूह को विकर्णीत कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) If (R, +, X) is a ring such that $a^2 = a, \forall a \in R$, then prove that :

(i) $a + a = 0$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

(iii) R is commutative ring

यदि (R, +, X) एक ऐसा वलय हो कि $a^2 = a, \forall a \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $a + a = 0$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

(iii) R क्रमविनिमेय वलय है 2+2+2

(b) Prove that a commutative ring with unity is a field iff it has no proper ideal *i.e.* iff it is simple.

सिद्ध कीजिए कि एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय क्षेत्र होता है यदिदि इसमें कोई उचित गुणजावली विद्यमान न हो। 3+3

8. (a) If a and b are any *nm* zero elements of a Euclidean ring R, then prove that :

(i) b is a unit of R $\Rightarrow d(ab) = d(a)$

(ii) b is not a unit of R $\Rightarrow d(ab) > d(a)$

यदि एक यूक्लिडीय वलय के a तथा b कोई शून्येत्तर अवयव हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) R का एक एकक b है R $\Rightarrow d(ab) = d(a)$

(ii) R का एक एकक b नहीं है R $\Rightarrow d(ab) > d(a)$ 2+4

(b) If R is an integral domain, then prove that the polynomial ring R[x] is also an integral domain.

यदि R एक पूर्णांकीय प्रान्त है, तो सिद्ध कीजिए कि बहुपद वलय R[x] भी पूर्णांकीय प्रान्त होता है। 6

9. (a) Examine which of the following sets is a subspace of the vector space $V_3(R)$?

(i) $W_1 = \{(x, 2y, 3z) \mid x, y, z \in R\}$

(ii) $W_2 = \{(x, x, x) \mid x \in R\}$

(iii) $W_3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Q\}$

जाँच कीजिए कि निम्न समुच्चयों में से कौनसी समष्टि $V_3(R)$ की उपसमष्टि है ?

(i) $W_1 = \{(x, 2y, 3z) \mid x, y, z \in R\}$

(ii) $W_2 = \{(x, x, x) \mid x \in R\}$

(iii) $W_3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in Q\}$ 2+2+2

(b) Show that the set S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)] spans the vector space $V_3(R)$ but is not a basis set.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)} सदिश समष्टि $V_3(R)$ की विस्तृति करता है परन्तु एक आधार समुच्चय नहीं है। 6

10. (a) If the matrix of the linear transformation t on $V_2(R)$ relative to the standard basis of $V_2(R)$ is $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, then what is the matrix of relative to the basis $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$?

यदि $V_2(R)$ के मानक आधार के सापेक्ष रैखिक रूपान्तरण t का आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो आधार $B_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ के सापेक्ष t की आव्यूह क्या है ? 6

(b) A linear transformation E, then show that :

(i) E is the projection $\Leftrightarrow$ (1 – E) is the projection

(ii) If E is the projection on W_1 along W_2, then (1 – E) is the projection W_2 of along W_1.

एक रैखिक रूपान्तरण E, तो प्रदर्शित कीजिए कि :

(i) E एक प्रक्षेप है $\Leftrightarrow$ (1 – E) एक प्रक्षेप है

(ii) यदि E, W_2 के अनुदिश W_1 पर प्रक्षेप है, तो (1 – E), W_1 के अनुदिश पर प्रक्षेप है। 4+2

11. (a) Find the minimal polynomial of :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ 6

(b) Find A^8 by diagonalising of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

निम्न आव्यूह A का विकर्णीकरण करके A^8 ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ 6