Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SA–212

B.A./B.Sc. (Part–III) DUE of B.A./B.Sc. Part–II Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 66*

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Write Removable discontinuity.

   अपनेय असांतत्यता को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Write statement of Mostest theorem.

   Mostest (मॉसटेस्ट) प्रमेय का प्रकथन (Statement) लिखिए।

   (iii) Check the differentiability of the function $f(x) = |x - 1|$ at $x = 1$.

   फलन $f(x) = |x - 1|$ की $x = 1$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

   (iv) Write statement of Cauchy's mean value theorem.

   कॉशी मध्यमान प्रमेय का प्रकथन लिखिए।

   (v) Explain Darboux sums.

   डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Write definition of integral function.

   समाकल फलन की परिभाषा लिखिए।

   (vii) Write definition of Oscillatory sequence.

   दोलनी अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।

   (viii) Write Hyper Harmonic Series.

   हाइपर हारमोनिक श्रेणी लिखिए।

   (ix) Write Abel's Test.

   Abel (ऐबल) का परीक्षण लिखिए।

   (x) Write Euler's formulae.

   Euler (आयलर) का सूत्र लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Using $\in$-δ definition of limit, prove that :

$$\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (ax + by) = 5a - 2b$$

सीमा की $\in$-δ परिभाषा के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (ax + by) = 5a - 2b$$

Or

(अथवा)

Examine the continuity the function f defined by $f(x) = |x| + |x-1|$ at $x = 1$.

फलन $f(x) = |x| + |x-1|$ की $x = 1$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।

3. Prove that the following function f is continuous but not differentiable at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 0$ पर सतत् किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Or

(अथवा)

Is the Rolle's theorem applicable for the following function in the interval $[a, b]$? If yes, then verify the theorem :

$$f(x) = \log\left\{\frac{x^2 + ab}{x(a+b)}\right\},\ 0 \notin [a, b]$$

क्या निम्न फलन के लिये अन्तराल $[a, b]$ में रोल प्रमेय लागू होता है ? यदि हाँ, तो रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

$$f(x) = \log\left\{\frac{x^2 + ab}{x(a+b)}\right\},\ 0 \notin [a, b]$$

4. If $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$, prove that :

$$f \in \mathrm{R}[0, 1] \text{ and } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

यदि $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$, सिद्ध कीजिए कि :

$$f \in \mathrm{R}[0, 1] \text{ तथा } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Or

(अथवा)

Every continuous function is R-integrable.

प्रत्येक सतत् फलन R-समाकलनीय होता है।

5. Prove that the sequence $<x_n>$ is convergent, where :

$$x_n = \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}\right]$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी है, जहाँ :

$$x_n = \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}\right]$$

Or

(अथवा)

Test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

6. Test the convergence of the following integral :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

निम्नलिखित समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

Or

(अथवा)

Find Fourier series for the following function :

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi$$

निम्नलिखित फलन के लिए फूरियर की श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Prove that :

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

does not exist.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

विद्यमान नहीं है। 6

(b) If a function f is continuous in a closed interval $[a, b]$, then it is bounded in that interval.

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् हो, तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है। 6

8. (a) Compute the value of θ for the function $f(x) = ax^2 + bx + c$ in the following form of Lagrange's mean value theorem :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h); \qquad 0 < \theta < 1$$

फलन $f(x) = ax^2 + bx + c$ के लिये निम्न लैग्रेंज मध्यमान प्रमेय के रूप में θ का मान ज्ञात कीजिए :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h); \qquad 0 < \theta < 1$$ 6

(b) Find Lagrange's and Cauchy's remainder after n terms in the expansion of :

$$f(x) = \log (1 + x)$$

निम्न फलन के विस्तार में n पदों के पश्चात् लैगरान्ज व कॉशी रूप वाले शेषफल ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \log (1 + x)$$ 6

9. (a) If 'f' is bounded function defined on $[a, b]$ then for every $\in > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $\forall$ P $\in$ P$[a, b]$ with $\| P \| \leq \delta$:

फलन f अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित परिसीमित है तो प्रत्येक $\in > 0$ के संगत कोई ऐसा $\delta > 0$ विद्यमान होगा कि प्रत्येक विभाजन P $\in$ P$[a, b]$, $\| P \| \leq \delta$ के लिये :

(i) $U(f, P) < \int_a^{\overline{b}} f(x)dx + \in$

(ii) $L(f, P) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \in$ 6

(b) If function $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$ is the partition of $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ then $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

यदि फलन $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ तथा $P = \left\{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \ldots\ldots, \frac{n\pi}{2n}\right\}$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ का Partition (विभाजन) है तब $f \in R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$। 6

10. (a) Show the following series is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

सिद्ध कीजिए निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $x < 1$ और अपसारी है यदि $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ 6

(b) Examine the following series is convergent when $x \leq \frac{1}{e}$ and divergent when $x > \frac{1}{e}$:

$$x + \frac{2^2 x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3 x^3}{\lfloor 3} + \frac{4^4 x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots \; x > 0$$

निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $x \leq \frac{1}{e}$ तथा अपसारी है यदि $x > \frac{1}{e}$ की जाँच कीजिए :

$$x + \frac{2^2 x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3 x^3}{\lfloor 3} + \frac{4^4 x^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots \; x > 0$$ 6

11. Find the Fourier series for the following function :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

निम्न फलन के लिये फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

12