

Roll No. : .....

Total No. of Questions : 11 ]

[ Total No. of Printed Pages : 8

# SA-135

## B.A./B.Sc. (Part-III) DUE Part-I Suppl. Examination, 2021

### MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours ]

[ Maximum Marks : 68

#### Section-A

(Marks : 1 × 12 = 12)

**Note :-** Answer all *twelve* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 12 = 12)

**नोट :-** सभी बारह प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

#### Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

**Note :-** Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

**नोट :-** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

#### Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

**Note :-** Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

**नोट :-** पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-1405

( 1 )

SA-135 P.T.O.

## Section–A

### (खण्ड–अ)

1. (i) If  $\vec{r} = t^3 \hat{i} - \cos t \hat{j} + (t^2 + 1) \hat{k}$ , then find  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  and  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .
- यदि  $\vec{r} = t^3 \hat{i} - \cos t \hat{j} + (t^2 + 1) \hat{k}$ , तो  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  तथा  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  ज्ञात कीजिए।
- (ii) Define gradient of a scalar function.  
अदिश बिन्दु फलन की प्रवणता को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define irrotational vector.  
अघूर्णीय सदिश को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Circulation.  
परिसंचरण को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Gauss's divergence theorem.  
गॉस की अपसरण प्रमेय को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Find the co-ordinate of the centre of the following conic :  
$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$
  
निम्नलिखित शांकव के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :  
$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0$$
- (vii) Write central form of the equation of a sphere.  
केन्द्रीय रूप में गोले का समीकरण लिखिए।
- (viii) Define reciprocal cone.  
व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।
- (ix) Write the polar equation of a line passing through two points  $(r_1, \theta_1)$  and  $(r_2, \theta_2)$ .  
दो बिन्दुओं  $(r_1, \theta_1)$  तथा  $(r_2, \theta_2)$  से गुजरने वाली रेखा का ध्रुवीय समीकरण लिखिए।
- (x) Define Enveloping Cylinder.  
अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए।
- (xi) Define centre of conicoid.  
शांकवज के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।
- (xii) Define diametral plane for paraboloids.  
परवलज के लिए व्यासग तल को परिभाषित कीजिए।

## Section-B

(खण्ड-ब)

2. If  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are constant vectors,  $n$  is a constant and  $\vec{r}$  is a vector function of the scalar variable  $t$  given by :

$$\vec{r} = (\cos nt) \vec{a} + (\sin nt) \vec{b}$$

then prove that :

(i)  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + n^2 \vec{r} = 0$

(ii)  $\vec{r} \times \frac{d \vec{r}}{dt} = n(\vec{a} \times \vec{b})$

यदि  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  अचर सदिश हैं,  $n$  कोई अचर है तथा सदिश फलन  $\vec{r}$ ,  $t$  का एक फलन है :

$$\vec{r} = (\cos nt) \vec{a} + (\sin nt) \vec{b}$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

(i)  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + n^2 \vec{r} = 0$

(ii)  $\vec{r} \times \frac{d \vec{r}}{dt} = n(\vec{a} \times \vec{b})$  (2+2)

Or

(अथवा)

Show that the following vector is solenoidal :

सिद्ध कीजिए कि निम्न सदिश परिनालिकीय सदिश है :

$$(x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k} \quad (4)$$

3. Evaluate  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , where  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$  and C is the curve  $y = x^2$  in the  $xy$ -plane from  $(0, 0)$  to  $(3, 9)$ .

मान ज्ञात कीजिए  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , जहाँ  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} + xy\hat{j}$  तथा C,  $xy$  समतल में बिन्दु  $(0, 0)$  से  $(3, 9)$  तक वक्र  $y = x^2$  है।

**Or**

(अथवा)

Evaluate by Green's theorem :

$$\int_C (e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy)$$

where C is the rectangle with vertices  $(\pi, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\pi, \frac{\pi}{2})$  and  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

ग्रीन प्रमेय से मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy)$$

जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष  $(\pi, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\pi, \frac{\pi}{2})$  तथा  $(0, \frac{\pi}{2})$  हैं।

4. Find the equations of asymptotes of the following hyperbola :

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

निम्न अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

**Or**

(अथवा)

Find the condition that the straight line  $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$  may touch the circle

$$r = 2a \cos \theta.$$

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा  $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$  वृत्त  $r = 2a \cos \theta$  को स्पर्श करे।

5. Find the equation of the sphere passing through the points :

$$(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) \text{ and } (0, 0, c).$$

निम्न बिन्दुओं से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) \text{ तथा } (0, 0, c).$$

*Or*

(अथवा)

Find the equation of the cone whose vertex is  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and base is the guiding curve :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष  $(\alpha, \beta, \gamma)$  तथा आधार निर्देशक वक्र  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$  है।

6. Find the equation of two planes which contain the line  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  and touch the ellipsoid  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ .

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  से गुजरते हैं और दीर्घवृत्त  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$  को स्पर्श करते हैं।

*Or*

(अथवा)

The plane  $3x + 4y = 1$  is a diametral plane of the paraboloid  $5x^2 + 6y^2 = 2z$ , then find the equation to the chord through  $(3, 4, 5)$  which it bisects.

परवलय  $5x^2 + 6y^2 = 2z$  का एक व्यासग समतल  $3x + 4y = 1$  है। बिन्दु  $(3, 4, 5)$  से जाने वाली तथा इस पर समद्विभाजित होने वाली जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Section-C

(खण्ड-स)

7. If  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , prove that :

(i)  $\text{div } \vec{r} = 3$

(ii)  $\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{2}{3}$

(iii)  $\text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$

यदि  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , है, तो सिद्ध कीजिए कि :

(i)  $\text{div } \vec{r} = 3$

(ii)  $\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{2}{3}$

(iii)  $\text{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$

(4+4+4)

8. (a) Evaluate :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

where  $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ , S is the surface of the cube bounded by the planes  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ .

मान ज्ञात कीजिए :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

जहाँ  $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ , S उस घन का पृष्ठ है जो कि निम्न समतलों में परिवद्ध है :

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$$

- (b) If  $\vec{r} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$ ,  $\vec{s} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$  and  $\vec{v} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$ , then prove that :

$$\int_1^2 \vec{r} \cdot (\vec{s} \times \vec{v}) dt = 0$$

यदि  $\vec{r} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$ ,  $\vec{s} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$  तथा  $\vec{v} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$  है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_1^2 \vec{r} \cdot (\vec{s} \times \vec{v}) dt = 0 \quad (6+6)$$

9. Find the nature of the conic represented by the equation  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  and trace it also.

समीकरण  $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$  द्वारा प्रदर्शित शंकु की प्रकृति ज्ञात कीजिए एवं इसका अनुरेखन भी कीजिए। (12)

10. (a) Find the equation of sphere which passes through point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and the circle  $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$ .

बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  और वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$  से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that the equation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone if :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$$

सिद्ध कीजिए कि समीकरण :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

एक शंकु को निरूपित करती है, यदि :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d \quad (6+6)$$

11. (a) Find the points of intersection of the line  $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-11}{7}$  and the surface  $12x^2 - 17y^2 + 7z^2 = 7$ .

रेखा  $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-11}{7}$  तथा पृष्ठ  $12x^2 - 17y^2 + 7z^2 = 7$  का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

- (b) Show that the feet of the normals from the point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  to the paraboloid  $x^2 + y^2 = 2az$  lie on the following sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + \gamma)z - (\alpha^2 + \beta^2) \frac{y}{2\beta} = 0$$

सिद्ध कीजिए कि परवलज  $x^2 + y^2 = 2az$  पर बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  से खींची अभिलम्बों के पाद निम्न गोले पर स्थित हैं :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + \gamma)z - (\alpha^2 + \beta^2) \frac{y}{2\beta} = 0 \quad (6+6)$$