Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

SA–128

B.A./B.Sc. (Part–III) DUE Part–I Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Evolute.

केन्द्रज को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define pedal equation of the curve.

वक्र के पादिक समीकरण को परिभाषित कीजिए।

(iii) If $z = xy^2 + x^2y$, $x = at^2$, $y = 2at$, then find $\frac{dz}{dt}$.

यदि $z = xy^2 + x^2y$, $x = at^2$, $y = 2at$, तो $\frac{dz}{dt}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(iv) Define Jacobian.

जेकोबियन की परिभाषा दीजिए।

(v) Find points of inflexion of the following curve :

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

निम्न वक्र के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

(vi) Discuss the symmetric property for tracing the curve.

वक्र के अनुरेखण में सममित ज्ञात करने के गुण बताइए।

(vii) Define Gamma Function.

गामा फलन को परिभाषित कीजिए।

(viii) Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dx\, dy$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dx\, dy$$

(ix) Define Intrinsic Equation.

नैज समीकरण को परिभाषित कीजिए।

(x) Define Dirichlet's integral.

डिरिचलिट समाकल को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Find the pedal equation of the parabola $y^2 = 4a(x + a)$.

परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ का पादिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

For the curve $S = ae^{x/a}$, prove that :

$$ap = s\sqrt{s^2 - a^2}$$

वक्र $S = ae^{x/a}$ के लिए, सिद्ध कीजिए कि :

$$ap = s\sqrt{s^2 - a^2}$$

3. If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

Or

(अथवा)

If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, then find value of $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

यदि $u^3 + v^3 = x + y$ और $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. Find the points where the function $x^3y^2(1 - x - y)$ has maximum or minimum values.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $x^3y^2(1 - x - y)$ का मान उच्चतम या न्यूनतम है।

Or

(अथवा)

Find points of inflexion of the following curve :

$$y = e^{-x^2}$$

निम्न वक्र के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$$y = e^{-x^2}$$

5. Prove that :

$$\frac{\left\{\left|\overline{\left(\frac{1}{3}\right)}\right\}^2\right.}{\left|\overline{\left(\frac{1}{6}\right)}\right.} = \frac{\sqrt{\pi}2^{1/3}}{\sqrt{3}}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\left\{\left|\overline{\left(\frac{1}{3}\right)}\right\}^2\right.}{\left|\overline{\left(\frac{1}{6}\right)}\right.} = \frac{\sqrt{\pi}2^{1/3}}{\sqrt{3}}$$

Or

(अथवा)

Evaluate $\int\int xy\,dx\,dy$ where the region of integration is $x + y \leq 1$ in the positive quadrant.

मान ज्ञात कीजिए $\int\int xy\,dx\,dy$ जहाँ समाकलन का क्षेत्र $x + y \leq 1$ का धनात्मक पद है।

6. Find the area common to the following curves :

$$r = a,\ r = a(1 + \cos\theta)$$

निम्न वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$r = a,\ r = a(1 + \cos\theta)$$

Or

(अथवा)

Find the surface of the solid generated by the revolution of the astroid $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ about the x-axis.

ऐस्ट्रॉयड $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ द्वारा x-अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित घनाकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Section–C

(खण्ड–स)

7. Find asymptotes of the following curve :

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x = 1$$

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x = 1$$

8. If $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$, then prove :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

यदि $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$, तो सिद्ध कीजिए :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

9. Trace the curve :

$$xy^2 = 4a^2(2a - x)$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$xy^2 = 4a^2(2a - x)$$

10. Prove Legendre's Duplication formula :

$$\overline{|(m)}\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\overline{|(2m)}}{2^{2m-1}} \qquad m \in Z$$

लिजेन्डर द्विगुणन सूत्र सिद्ध कीजिए :

$$\overline{|(m)}\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\overline{|(2m)}}{2^{2m-1}} \qquad m \in Z$$

11. Find the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$. Also prove that the arc of upper half of the cardioid is bisected by $\theta = \pi/3$.

हृदयाभ (कार्डियोइड) $r = a(1 + \cos\theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि कार्डियोइड का ऊपरी अर्धभाग चाप $\theta = \pi/3$ से समद्विभाजित होता है।