

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

SA-114

B.A./B.Sc. (Part-III) DUE Part-I Suppl. Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions (Answer limit 200 words). Each question has internal choice. Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-1389

(1)

SA-114 P.T.O.

Section–A (खण्ड–अ)

1. (i) If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are roots of the equation :
- $$x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n = 0, p_n \neq 0$$
- then find $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
यदि $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ दी गई समीकरण के मूल हैं :
- $$x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n = 0, p_n \neq 0$$
- तब ज्ञात कीजिए $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ।
- (ii) If α, β, γ are the roots of the cubic $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find $\sum \alpha^2\beta$.
यदि α, β, γ त्रिघात समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं, तो $\sum \alpha^2\beta$ ज्ञात कीजिए।
- (iii) Define Symmetric and Hermitian matrices.
सममित एवं हर्मिशियन मैट्रिसेज की परिभाषाएँ दीजिए।
- (iv) Write the conditions of consistency of a system of linear equations.
रैखिक समीकरण निकाय की संगतता की शर्तें लिखिए।
- (v) Give the definition of group based on left axioms.
वाम अभिगृहीतों पर आधारित ग्रुप की परिभाषा दीजिए।
- (vi) State the Fermat's theorem.
फर्मेट प्रमेय का कथन दीजिए।
- (vii) Define normal subgroup.
प्रसामान्य ग्रुप को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Isomorphism.
तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define Permutation.
क्रमचय को परिभाषित कीजिए।
- (x) Give the definition of order of an element of a group.
समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

Section–B (खण्ड–ब)

2. Find the equation whose roots are increased by 2 of the equation $4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$.
वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण $4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$ के मूलों से 2 अधिक हों।

Or (अथवा)

Solve the equation $x^3 - 15x - 126 = 0$ by Cardon's method.

समीकरण $x^3 - 15x - 126 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

3. Find the rank of matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स A की जाति ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Or (अथवा)

Find the Eigenvalues and the corresponding Eigenvectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूलों एवं उनके संगत सदिशों को ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Prove that intersection of two subgroups of a group is subgroup of the group.
सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस ग्रुप का उपसमूह होता है।

Or (अथवा)

State and prove Euler's theorem.

आयलर प्रमेय का कथन दीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

5. Find the quotient group $\frac{G}{H}$ and also prepare its composition table, where :

$$G = (Z, +) \text{ and } H = (4Z, +)$$

यदि $G = (Z, +)$ तथा $H = (4Z, +)$ है, तो विभाग ग्रुप $\frac{G}{H}$ ज्ञात कीजिए एवं संक्रिया सारणी बनाइए।

Or (अथवा)

Prove that if f is a homomorphism from a group G to G' with kernel K , then $K \triangleleft G$.

सिद्ध कीजिए कि यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो तो f की अष्टि $K \triangleleft G$ ।

6. If $\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, then prove that :

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1) \ \rho(7) \ \rho(2) \ \rho(6) \ \rho(3) \ \rho(5) \ \rho(8) \ \rho(4))$$

यदि $\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$ तथा $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए :

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(1) \ \rho(7) \ \rho(2) \ \rho(6) \ \rho(3) \ \rho(5) \ \rho(8) \ \rho(4))$$

Or (अथवा)

Prove that if order of an element a of a group is n , then $a^m = e$ (identity) if and only if m is multiple of n .

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप के अवयव a की कोटि n है, तो $a^m = e$ (तत्समक) यदि और केवल यदि m, n का गुणज है।

Section-C (खण्ड-स)

7. Solve by Ferrari method :

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$$

फैरारी विधि द्वारा हल कीजिए :

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$$

8. State and prove Cayley-Hamilton theorem.

कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

9. State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

10. Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G .

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

11. Prove that the set A_n of all even permutations of degree n is a group of order

$\frac{1}{2}|n|$ for the product of permutations.

सिद्ध कीजिए कि n अंशांक के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए

$\frac{1}{2}|n|$ कोटि का ग्रुप होता है।