Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **4**

EDE–189

B.Sc. B.Ed. (Ist Year) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II (CC–5)

(Vector Geometry and Linear Algebra)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **60***

Section–A **(Marks : 2 × 8 = 16)**

Note :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **2** marks.

(खण्ड–अ) **(अंक : 2 × 8 = 16)**

नोट :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 8 × 3 = 24)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **8** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 8 × 3 = 24)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **8** अंक का है।

Section–A (खण्ड–अ) 2 each

1. (i) If $r = a \cos ti + a \sin tj + tk$, then find the value of $\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$.

यदि $r = a \cos ti + a \sin tj + tk$, तो $\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) Define Stokes' theorem.

स्टॉक्स के प्रमेय को परिभाषित कीजिए।

(iii) If $f = xy^2i + 2x^2yzj - 3yz^2k$, then find div f at the point (1, –1, 1).

यदि $f = xy^2i + 2x^2yzj - 3yz^2k$, तो बिन्दु (1, –1, 1) पर div f ज्ञात कीजिए।

(iv) If $r(t) = ti - t^2j + (t-1)k$ and $s(t) = 2t^2i + 6tk$, then find the value :

$$\int_0^2 (r \times s)dt$$

यदि $r(t) = ti - t^2j + (t-1)k$ और $s(t) = 2t^2i + 6tk$ तो $\int_0^2 (r \times s)dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

(v) If possible, express the vector $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ as a LC of the following vector :

$$\alpha_1 = (2, 1, -1);\ \alpha_2 = (-1, 0, 3);\ \alpha_3 = (0, 1, 5)$$

यदि सम्भव हो तो सदिश $\alpha = (0, 4, 20) \in V_3(R)$ को निम्नलिखित सदिशों के LC के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\alpha_1 = (2, 1, -1);\ \alpha_2 = (-1, 0, 3);\ \alpha_3 = (0, 1, 5)$$

(vi) Define Invertible Matrix.

प्रतिलोमीय मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए।

(vii) Find the characteristic equation of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

निम्नलिखित मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(viii) Define Eigen values and Eigen vectors.

आइगेन मान तथा आइगेन सदिश को परिभाषित कीजिए।

Section–B (खण्ड–ब) 4 each

2. If $a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$; $b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$ and $c = 2i + 3j - k$, then find $\left\{\frac{d}{d\theta}\{a \times (b \times c)\}\right\}_{\theta=0}$.

यदि $a = \sin\theta i + \cos\theta j + \theta k$; $b = \cos\theta i - \sin\theta j - 3k$ और $c = 2i + 3j - k$ हो, तो ज्ञात कीजिए $\left\{\frac{d}{d\theta}\{a \times (b \times c)\}\right\}_{\theta=0}$ ।

***Or* (अथवा)**

If $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, then find the value of grad f at the point $(1, -2, -1)$.
यदि $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ हो, तो बिन्दु $(1, -2, -1)$ पर grad f का मान ज्ञात कीजिए।

3. Find the directional derivative of $f = xy + yz + zx$ in the direction of the vector $i + 2j + 2k$ at the point $(1, 2, 0)$.

बिन्दु $(1, 2, 0)$ पर $f = xy + yz + zx$ का $i + 2j + 2k$ की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

***Or* (अथवा)**

Find the equations of the tangent plane and the normal to the surface $xyz = 4$ at the point $(1, 2, 2)$.
पृष्ठ $xyz = 4$ के बिन्दु $(1, 2, 2)$ पर स्पर्श तल एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. Prove that the following vector is irrotational :

$$f = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न सदिश अघूर्णीय सदिश है :

$$f = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$$

***Or* (अथवा)**

If $r(t) = ti - 3j + 2tk$; $s(t) = i - 2j + 2k$ and $v(t) = 3i + tj - k$, then find the value of the following :

$$\int_1^2 r\,(s \times v)dt$$

यदि $r(t) = ti - 3j + 2tk$; $s(t) = i - 2j + 2k$ तथा $v(t) = 3i + tj - k$ हो, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^2 r\,(s \times v)dt$$

5. If $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $z = f(x, y)$, then prove that :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

यदि $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $z = f(x, y)$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

***Or* (अथवा)**

If $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, then prove that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

यदि $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ।

6. Find the co-ordinates of the vector (a, b, c) of $V_3(R)$ relative to its basis $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

   $V_3(R)$ के आधार $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ के सापेक्ष $(a, b, c) \in V_3(R)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

***Or* (अथवा)**

Find the matrix of linear transformation t on R^3 w.r.t. basis B defined as :

$t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; - x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

where $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$.

आधार B के सापेक्ष R^3 पर परिभाषित रैखिक रूपान्तरण t की मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए :

$t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; - x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

जहाँ $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$।

Section–C (खण्ड–स) — 8 each

7. Prove that $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$.

   सिद्ध कीजिए $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$।

8. Prove that the following vectors of $V_3(R)$ are LI :

   $$\alpha_1 = (1, 1, 0);\ \alpha_2 = (1, 1, 1);\ \alpha_3 = (2, 1, 3)$$

   सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ के निम्न सदिश LI हैं :

   $$\alpha_1 = (1, 1, 0);\ \alpha_2 = (1, 1, 1);\ \alpha_3 = (2, 1, 3)$$

9. Using Cramer's rule solve the following equations :

   $$2x + 3y + 5z = 15;\ 3x + 5y + 2z = 12;\ 5x + 2y + 3z = 13$$

   क्रेमर नियम का प्रयोग करते हुए निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

   $$2x + 3y + 5z = 15;\ 3x + 5y + 2z = 12;\ 5x + 2y + 3z = 13$$

10. Show that the dimension of the vector space V(R) of all 2×2 real matrices is 4.

    सिद्ध कीजिए कि 2×2 क्रम के सभी वास्तविक मैट्रिक्स के सदिश समष्टि V(R) की विमा 4 है।

11. Find the Eigen values and Eigen vector of matrix A, where $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

    मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूल व सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ।