

Roll No :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

A-324

B.A. (Part-III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Analysis)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 10)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-51

(1)

A-324 P.T.O.

Section-A (खण्ड-अ)

1 each

1. (i) What is the difference between rational and irrational numbers ?
परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं में क्या अन्तर है ?
- (ii) Define a complete ordered field.
पूर्ण क्रमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define a bounded metric space.
परिबद्ध दूरिक समष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Perfect set.
परिपूर्ण समुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (v) What is the difference between limit and limit point of a sequence ?
किसी अनुक्रम की सीमा एवं सीमा बिन्दु का अन्तर बताइए।
- (vi) Define a uniform continuous function in metric spaces.
दूरिक समष्टियों में एकसमान सतत् फलन परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define deleted neighbourhood of a complex number.
किसी सम्मिश्र संख्या के निष्कासित प्रतिवेश को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Harmonic function.
प्रसंवादी फलन को परिभाषित कीजिए।
- (ix) Write necessary conditions for a conformal mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण के लिए आवश्यक प्रतिबंध लिखिए।
- (x) Write sufficient conditions for a conformal mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण के लिए पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।

Section-B (खण्ड-ब)

4 each

2. If a, b are two rational numbers such that $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ is a rational number, then prove that \sqrt{ab} is also a rational number.
यदि a, b दो ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ एक परिमेय संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि \sqrt{ab} भी परिमेय संख्या है।

Or (अथवा)

Prove that between two different real numbers, there lie an infinite number of irrational numbers.

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

3. If A and B be two bounded sets in a metric space (X, d) , then prove $A \cup B$ is also bounded in (X, d) .

यदि A तथा B किसी दूरिक समष्टि (X, d) में दो परिबद्ध समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $A \cup B$ भी (X, d) में परिबद्ध होगा।

Or (अथवा)

Prove that in a metric space every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में, प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है।

4. Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Or (अथवा)

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

सिद्ध कीजिए कि एक संहत दूरिक समष्टि का एक संवृत उप-समुच्चय संहत होता है।

5. Find the regions of the z -plane for which :

$$\left| \frac{z-a}{z+a} \right| < 1, = 1, > 1$$

where $\operatorname{Re}(a) > 0$.

z -समतल के वे क्षेत्र ज्ञात कीजिए जिसके लिए :

$$\left| \frac{z-a}{z+a} \right| < 1, = 1, > 1$$

जहाँ $\operatorname{Re}(a) > 0$ ।

Or (अथवा)

Derive polar form of Cauchy-Riemann equations.

कोशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप स्थापित कीजिए।

6. Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at the origin although the Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूलबिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि मूलबिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होता है।

Or (अथवा)

Show that $u = x^3 - 3xy^2$ is a harmonic function. Find the corresponding analytic function.

सिद्ध कीजिए कि $u = x^3 - 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है। संगत विश्लेषिक फलन भी ज्ञात कीजिए।

Section-C (खण्ड-स)

12 each

7. State and prove Archimedean property for real numbers.

वास्तविक संख्याओं के लिए आर्किमिडीय प्रगुण का कथन लिखिए एवं उसे सिद्ध कीजिए।

8. Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence but converse need not be true.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कोशी अनुक्रम होता है किन्तु विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

9. Let X and Y be two metric spaces and f is a mapping of X into Y , then prove that f is continuous at x_0 iff :

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

माना कि X एवं Y दो दूरिक समष्टियाँ हैं तथा $f: X \rightarrow Y$, तब सिद्ध कीजिए कि फलन f , x_0 पर संतत है यदिदि :

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

10. If n is real, show that $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ is analytic except when $r = 0$ and then its derivative is :

$$nr^{n-1}[\cos (n-1)\theta + i \sin (n-1)\theta]$$

यदि n वास्तविक हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, $r = 0$ के अतिरिक्त विश्लेषिक है तथा इसका अवकलज है :

$$nr^{n-1}[\cos (n-1)\theta + i \sin (n-1)\theta]$$

11. Find the image of the triangular region of the z -plane bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$ under the transformation $w = 2z$.

z -समतल में रेखाओं $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ से परिसीमित त्रिभुजाकार क्षेत्र का रूपान्तरण $w = 2z$ के अन्तर्गत प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।