

Roll No :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 7

A-323

B.A. (Part-III) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Advance Algebra)

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 66

Section-A

(Marks : 1 × 10 = 10)

Note :- Answer all *ten* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 1 mark.

(खण्ड-अ)

(अंक : 1 × 10 = 20)

नोट :- सभी दस प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 12 × 3 = 36)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 12 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 12 × 3 = 36)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 12 अंक का है।

BI-50

(1)

A-323 P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define a Ring.
वलय को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Prime Field.
अभाज्य क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Ideal.
गुणजावली को परिभाषित कीजिए।
- (iv) State unique factorization theorem for a Euclidean Ring.
यूक्लिडियन वलय के लिए अद्वितीय गुणनखण्ड प्रमेय का प्रकथन दीजिए।
- (v) Define basis of a Vector Space.
सदिश समष्टि का आधार परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Quotient Space.
विभाग समष्टि परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Kernel of a Homomorphism.
समाकारिता की अष्टि परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Dual Space.
द्वैती समष्टि परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define Similar Matrices.
समरूप मैट्रिसेज परिभाषित कीजिए।
- (x) Define Minimal Polynomial.
अल्पिष्ठ बहुपद परिभाषित कीजिए।

Section-B

(खण्ड-ब)

2. Prove that every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

Or

(अथवा)

If a be an element of a ring R , then prove that the set :

$$N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$$

is a subring of R .

यदि a किसी वलय R का अवयव है, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय :

$$N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$$

वलय R का एक उपवलय है।

3. Prove that the intersection of two ideal of a ring is again an ideal of the ring.

सिद्ध कीजिए किसी वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस वलय की गुणजावली होती है।

Or

(अथवा)

If $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$ and $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$ are two polynomials over the ring $(z_6, +_6, \cdot_6)$, then find $f(x) \cdot g(x)$.

यदि वलय $(z_6, +_6, \cdot_6)$ में $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$ तथा $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$ कोई दो बहुपद हैं, तो $f(x) \cdot g(x)$ ज्ञात कीजिए।

4. Let $V(F)$ be an n -dimensional vector space, then prove that every set of $n + 1$ or more vectors of V is linearly dependent.

यदि $V(F)$ एक n विमीय सदिश समष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि V के प्रत्येक $n + 1$ या उससे अधिक सदिशों का समुच्चय एक घातत आश्रित होगा।

Or

(अथवा)

Find the co-ordinates of the vector (a, b, c) of $V_3(\mathbb{R})$ relative to the basis $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

$V_3(\mathbb{R})$ में आधार $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ के सापेक्ष सदिश (a, b, c) के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

5. Prove that the mapping $t : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$ which is defined by $t(a, b) = (b, 0, a)$ is a linear transformation from $V_2(\mathbb{R})$ to $V_3(\mathbb{R})$.

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $t : V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R})$, जो $t(a, b) = (b, 0, a)$ से परिभाषित है, $V_2(\mathbb{R})$ से $V_3(\mathbb{R})$ पर एक रैखिक रूपान्तरण है।

Or

(अथवा)

If W be a subspace of a vector space $V(F)$, then prove that the quotient space

$\frac{V}{W}$ is a homomorphic image of V with Kernel W .

यदि W किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उप-समष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि विभाग समष्टि

$\frac{V}{W}$, सदिश समष्टि V का एक समाकारी प्रतिबिम्ब है जिसकी W अष्टि है।

6. Prove that all the eigen values of a Hermitian matrix are real.

सिद्ध कीजिए कि एक हर्मिसियन मैट्रिक्स के सभी आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

Or

(अथवा)

Find the minimal polynomial for the matrix :

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स का अल्पिष्ठ बहुपद ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Section-C

(खण्ड-स)

7. Show that $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ is a field for the following operation :

(i) $a \oplus b = a + b - 1$

(ii) $a \odot b = a + b - ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

सिद्ध कीजिए कि $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ निम्न संक्रियाओं के लिए एक क्षेत्र है :

(i) $a \oplus b = a + b - 1$

(ii) $a \odot b = a + b - ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

8. (a) Show that the ring of integers $(z, +, \cdot)$ is a principal ideal ring.

दर्शाए कि पूर्णाकीय वलय $(z, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली है।

(b) Prove that every Euclidean ring possesses unity element.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक यूक्लिडियन वलय में इकाई अवयव होता है।

9. (a) Prove that every finite dimensional vector space has a basis.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमीय सदिश समष्टि का एक आधार विद्यमान होता है।

(b) Let W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W .$$

W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

10. (a) Prove that every n -dimensional vector space $V(F)$ is isomorphic to $V_n(F)$.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक n -विमीय सदिश समष्टि $V(F)$, $V_n(F)$ के तुल्यकारी होता है।

(b) Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space and let t be a linear transformation from $V(F)$ to $V'(F)$, then prove that :

$$\text{rank } (t) + \text{nullity } (t) = \dim V$$

यदि $V(F)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा t , $V(F)$ से $V'(F)$ में एक रैखिक रूपान्तरण है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$t \text{ की कोटि} + t \text{ की शून्यता} = V \text{ की विमा}$$

11. (a) Find the eigen values and eigen vectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Diagonalize the following symmetric matrix :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

निम्न सममित मैट्रिक्स को विकर्णीत कीजिए :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$