Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–240

B.A. (Part–III) DUE Part–II Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Mechanics)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ) 1 each

1. (i) State Limi's Theorem.

   लामी प्रमेय का कथन लिखिए।

   (ii) Define Angle of Friction.

   घर्षण-कोण को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define Common Catenary and write its intrinsic equation.

   सामान्य कैटिनरी को परिभाषित कीजिए और उसका नैज समीकरण लिखिए।

   (iv) Define principle of virtual work for a system of coplaner force acting on a particle.

   किसी कण पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय के लिए कल्पित कार्य सिद्धान्त को परिभाषित कीजिए।

   (v) Write condition that a given system of forces should compound into a single force.

   एक दिये बल निकाय का एक एकल बल में समानीत होने की शर्त लिखिए।

   (vi) Define Stable Equilibrium.

   स्थायी संतुलन को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define Simple Harmonic Motion.

   सरल आवर्त गति को परिभाषित कीजिए।

   (viii) What do you mean by Constrained Motion ?

   प्रतिबन्धित गति से आपका क्या अभिप्राय है ?

   (ix) Define Apsidal Angle.

   स्तब्धिका कोण को परिभाषित कीजिए।

   (x) Write pedal equation of Central Orbit.

   सकेन्द्र कक्षा का पादिक समीकरण लिखिए।

   (xi) Write Hooke's law for Elastic Strings.

   प्रत्यास्थ डोरियों के लिए हुक का नियम लिखिए।

   (xii) Define Kepler's third law of Planetary Motion.

   ग्रहीय गति हेतु केप्लर का तृतीय नियम परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब) 4 each

2. A heavy uniform beam is hung from a fixed point by two strings attached to its extremities. If the lengths of the strings and beam be as 2 : 3 : 4, show that the tensions in the strings and the weight of the beam are as $2:3:\sqrt{10}$.

एक भारी एक-समान छड़ सिरों पर दो रस्सियाँ बाँध कर एक नियत बिन्दु से लटकाई गई हैं। यदि रस्सियों और छड़ की लम्बाइयों में 2 : 3 : 4 का अनुपात हो, तो सिद्ध कीजिए कि रस्सियों में तनाव और छड़ का भार $2:3:\sqrt{10}$ अनुपात में है।

Or

(अथवा)

A weightless string ABCDE is hanging from two fixed points A and E. Three particles of weight W each are hanging from B, C and D. The three portions AB, BC and CD of the string are inclined to the horizontal at angles α, β and γ respectively, then prove that :

$$2 \tan \beta = \tan \alpha - \tan \gamma.$$

एक भारहीन डोरी ABCDE दो स्थिर बिन्दुओं A और E से लटक रही है। प्रत्येक W भार के तीन कण B, C और D पर लटक रहे हैं। डोरी के तीन भाग AB, BC और CD क्षैतिज के साथ क्रमशः कोण α, β और γ बनाते हैं, तो सिद्ध कीजिए :

$$2 \tan \beta = \tan \alpha - \tan \gamma$$

3. One end of a heavy uniform rod AB can slide along a rough horizontal rod AC to which it is attached by a ring B and C are joined by a string. When the rod is just on the point of slipping, the string is perpendicular to the rod which makes an angle α with the vertical. Prove that the coefficient of friction is given by :

$$\mu = \frac{\tan \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}$$

एक भारी एवं एकसमान दण्ड AB का सिरा A, एक रूक्ष क्षैतिज दण्ड AC पर फिसल सकता है। B और C की एक डोरी द्वारा बांध दिया जाता है। जब AB फिसलने की अवस्था में होती है, तो डोरी AB पर समकोण बनाती है और AB ऊर्ध्वाधर से कोण α बनाती है। सिद्ध कीजिए कि घर्षण गुणांक :

$$\mu = \frac{\tan \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}$$

Or

(अथवा)

A uniform chain of length l is to be suspended from two points A and B in the same horizontal line, so that either terminal tension is n times that at lowest point, show that :

$$\text{Span AB} = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \log_e \left\{ n + \sqrt{n^2-1} \right\}$$

l लम्बाई की एकसमान जंजीर क्षैतिज रेखा के दो बिन्दु A तथा B के मध्य झूलती है, जिसके सिरों पर तनाव निम्नतम बिन्दु पर तनाव का n गुना है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\text{Span AB} = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \log_e \left\{ n + \sqrt{n^2-1} \right\}$$

4. Two equal uniform rods AB and AC, each of length $2b$ are freely jointed at A and rest on a smooth vertical circle of radius a. Show that, if 2θ be the angle between them, then :

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta.$$

$2b$ लम्बाई की दो बराबर एकसमान छड़ें AB और AC, A पर स्वच्छन्दतापूर्वक जुड़ी हुई हैं और a त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त पर रखी हुयी हैं। सिद्ध कीजिए कि यदि उनका मध्यस्थ कोण 2θ हो, तो :

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

Or

(अथवा)

Find the condition that the straignt line $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$ may be a null line for the same system of forces.

समान बल निकाय के लिए सरल रेखा $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$ का शून्य आघूर्ण रेखा होने का प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

5. The radial and transverse velocities of a particle are λr^2 and $\mu\theta^2$. Show that the equation of the path of the particle is $\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)=\left(\frac{\mu}{2r^2}\right)+C$ and its radial and transverse components of acceleration are :

$$2\lambda^2 r^3-\mu^2\left(\frac{\theta^4}{r}\right) \text{ and } \lambda\mu r\theta^2+2\mu^2\left(\frac{\theta^3}{r}\right)$$

किसी कण के अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग क्रमशः λr^2 तथा $\mu\theta^2$ है। सिद्ध कीजिए कि इसके पथ का समीकरण $\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)=\left(\frac{\mu}{2r^2}\right)+C$ है और इसके अरीय एवं अनुप्रस्थ त्वरण हैं :

$$2\lambda^2 r^3-\mu^2\left(\frac{\theta^4}{r}\right) \text{तथा } \lambda\mu r\theta^2+2\mu^2\left(\frac{\theta^3}{r}\right)$$

Or

(अथवा)

Show that if the displacement of a particle moving in a straight line is expressed by the equation $x = a \cos nt + b \sin nt$, it describes a SHM whose amplitude $\sqrt{(a^2+b^2)}$ and period $\frac{2\pi}{n}$.

यदि किसी सरल रेखा में गतिमान किसी कण का t समय पर विस्थापन $x = a \cos nt + b \sin nt$ से व्यक्त हो, तो सिद्ध कीजिए कि कण की गति SHM है जिसका आयाम $\sqrt{(a^2+b^2)}$ एवं आवर्तकाल $\frac{2\pi}{n}$ है।

6. A particle falls from rest under gravity in medium whole resistance varies as the square of the velocity, if v be its velocity and u be the velocity which would be acquired if there was no resistance and V the terminal velocity. Show that :

$$\frac{v^2}{u^2}=1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{V^2}+\frac{1}{2.3}\frac{u^4}{V^4}$$

एक कण विरामावस्था से गुरुत्वाकर्षण के अधीन गिरता है, जहाँ माध्यम में प्रतिरोध वेग के वर्ग के अनुपाती है। यदि इसका वेग V, प्रतिरोधरहित स्थिति में प्राप्त वेग u तथा अंतिम वेग V हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{v^2}{u^2}=1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{V^2}+\frac{1}{2.3}\frac{u^4}{V^4}$$

Or

(अथवा)

A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and the lowest point of its path. Show that :

$$n = m + 6.$$

W भार का एक कण, जो किसी स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी द्वारा लटकाया हुआ है, एक ऊर्ध्वाधर तलीय वृत्त में चलता है। जब कण अपने पथ के उच्चतम तथा निम्नतम बिन्दुओं पर होता है, तो डोरी में तनाव mW तथा nW होते हैं। सिद्ध कीजिए कि :

$$n = m + 6$$

Section–C

(खण्ड–स) 12 each

7. A particle slides down a smooth cycloid starting from rest at the cusp. Show that when it arrives at the vertex, the pressure on the curve is equal to twice the weight of the particle.

   एक कण किसी चक्रज के उभयाग्र से विरामावस्था से रवाना होकर नीचे की ओर गिरता है। सिद्ध कीजिए कि जब वह शीर्ष पर पहुँचता है, तो वक्र पर दाब कण के भार का दुगुना होता है।

8. Find the law of force towards the pole under which a particle describes equiangular spiral curve $r = ae^{\theta \cot \alpha}$.

   ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण समान कोणिक सर्पिल वक्र $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ निर्मित करता है।

9. A particle is projected with velocity V from the cusp of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex lowest down the arc. If a is the radius of the generating circle, show that the time of reaching the vertex is :

$$2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)} \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{(4ag)}}{V}\right]$$

एक कण किसी चिकने चक्रज के चाप पर जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष निम्नतम है, नीचे की ओर उभयाग्र से V वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि जनक वृत्त की त्रिज्या a है, तो सिद्ध कीजिए कि कण का शीर्ष पर पहुँचने का समय है :

$$2\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{(4ag)}}{V}\right]$$

10. A force F acts along the axis of x and another force nF along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$, show that the central axis lies on the following cylinder :

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2y^2 = n^4a^2$$

एक बल F, x-अक्ष के अनुदिश क्रियाशील है तथा दूसरा बल nF बेलन, $x^2 + y^2 = a^2$ के एक जनक के अनुदिश कार्यरत है। प्रदर्शित कीजिए कि केन्द्रीय अक्ष निम्न बेलन पर स्थित है :

$$n^2(nx - z)^2 + (1 + n^2)^2y^2 = n^4a^2$$

11. Two rough particles connected by a light string rest on an inclined plane. If there weights and corresponding coefficients of friction are W_1, W_2 and μ_1, μ_2 respectively, show that greatest inclination of the plane for the equilibrium is :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$$

एक भारहीन डोरी द्वारा बंधे हुए W_1 तथा W_2 भार के दो रूक्ष कण, जिनके घर्षण गुणांक क्रमशः μ_1, μ_2 हैं, एक आनत समतल पर रखे हुए हैं। सिद्ध कीजिए कि संतुलन की अवस्था में तल का अधिक से अधिकतम झुकाव है :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$$