Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–210

B.A. (Part–III) DUE Part–II Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - I

(Higher Calculus)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **66***

Section–A **(Marks : 1 × 10 = 10)**

Note :– Answer all *ten* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 10 = 10)**

नोट :– सभी **दस** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ) 1 each

1. (i) Define $(\in-\delta)$ for two variables.

   दो चरों $(\in-\delta)$ को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Write the types of Discontinuity.

   असातत्यता के प्रकार लिखिए।

   (iii) Write the example of Continuous but not Differentiable Function.

   सतत किन्तु अवकलनीय नहीं होने का उदाहरण लिखिए।

   (iv) Write the statement 'Lagrange's Mean Value Theorem'.

   'लाग्रांज का मध्यमान प्रमेय' का कथन लिखिए।

   (v) Define Darboux Sums.

   डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define Riemann Integral.

   रीमान समाकल को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define Supremum and Infimum of a Sequence.

   अनुक्रम के उच्चक तथा निम्नक को परिभाषित कीजिए।

   (viii) Write the nature of an infinite series.

   अनन्त श्रेणी की प्रकृति लिखिए।

   (ix) Define Uniform Convergence.

   एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

   (x) Define conditional convergent for Improper Integrals.

   अनन्त समाकलनों के लिए सह-प्रतिबन्ध अभिसारी को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब) 4 each

2. Examine for continuity the function f defined by $f(x) = |x| + |x - 1|$ at $x = 0$ and $x = 1$.

फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$ की $x = 0$ तथा $x = 1$ पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।

Or

(अथवा)

Using $\in - \delta$ definition of limit prove that :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

सीमा की $\in - \delta$ परिभाषा के प्रयोग से सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + 2y) = 3$$

3. If $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, use MVT to express the difference $f(1, 2) - f(2, -1)$ with the help of partial derivatives. Show that $0 < \theta < 1$.

यदि $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ मध्यमान प्रमेय का प्रयोग कर $f(1, 2) - f(2, -1)$ को आंशिक अवकलनों की सहायता से व्यक्त कीजिए। प्रदर्शित कीजिए $0 < \theta < 1$।

Or

(अथवा)

Show that the function $f(x, y) = \sin x + \cos y$ is differentiable everywhere.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y) = \sin x + \cos y$ सर्वत्र अवकलनीय है।

4. If $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$; then prove that :

(a) $L(f, P) = \frac{13}{8}$

(b) $U(f, P) = \frac{125}{132}$

यदि $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2]$ तथा $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(अ) $L(f, P) = \frac{13}{8}$

(ब) $U(f, P) = \frac{125}{132}$

Or

(अथवा)

If $f(x) = x$; $x \in [0, 1]$, prove that $f \in R[0, 1]$ and $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

यदि $f(x) = x$; $x \in [0, 1]$ हो, तो सिद्ध कीजिए $f \in R[0, 1]$ तथा $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$ ।

5. Prove that the sequence $<x_n>$ is convergent and $2 \leq \lim x_n \leq 3$, where :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $<x_n>$ अभिसारी है तथा $2 \leq \lim x_n \leq 3$, जहाँ :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Or

(अथवा)

Discuss the convergence and absolute convergence of the following series :

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$$

निम्न श्रेणी की अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए विवेचना कीजिए :

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$$

6. Obtain the Fourier series for the function $f(x) = x^2$ in the interval $-\pi < x < \pi$ and deduce that :

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.=\frac{\pi^2}{12}$$

फलन $f(x) = x^2$; $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए तथा निम्न का निगमन कीजिए :

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.=\frac{\pi^2}{12}$$

Or

(अथवा)

Prove that the following integral is convergent :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न समाकल अभिसारी है :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Section–C

(खण्ड–स) 12 each

7. (a) Prove that if a function f is continuous in a closed interval $[a, b]$; then it is bounded in that interval.

सिद्ध कीजिए यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत हो तो उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

(b) Show that the following limits do not exist :

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न सीमाओं पर अस्तित्व नहीं है :

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

8. (a) Show that the following function $f(x)$ are not differentiable at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad\quad , & x = 0 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad\quad , & x = 0 \end{cases}$$

(b) State and prove Mean Value Theorem for the functions of two variables.

दो चरों के फलनों का मध्यमान प्रमेय का प्रकथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

9. (a) Prove that Lower Darboux Sums never exceed any of the Upper Darboux Sums.

सिद्ध कीजिए निम्न डार्बू योग किसी भी ऊपरि डार्बू योग से अधिक नहीं होता है।

(b) If the Primitive of $f \in R[a, b]$ is ϕ on $[a, b]$ then prove that :

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

यदि $f \in R[a, b]$ का पूर्वग ϕ, $[a, b]$ में विद्यमान हो, तो सिद्ध कीजिए :

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

10. (a) Prove that every convergent sequence has a unique limit.

सिद्ध कीजिए प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है।

(b) Prove that the following series is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है यदि $x < 1$ एवं अपसारी है यदि $x \geq 1$:

$$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots\ldots$$

11. (a) Obtain the cosine series of $\sin x$ in the interval $0 < x < \pi$.

$\sin x$ की अन्तराल $0 < x < \pi$ में कोज्या (कोसाइन) श्रेणी ज्ञात कीजिए।

(b) Test for uniform convergence and term by term integration of the following series :

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

निम्न श्रेणी की एकसमान अभिसरण तथा पदशः समाकलन के लिए जाँच कीजिए :

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$