Roll No. : .....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

A–145

B.A. (Part–III) DUE Part–I Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Calculus and Geometry)

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **68***

Section–A **(Marks : 1 × 12 = 12)**

Note :– Answer all *twelve* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1** mark.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1 × 12 = 12)**

नोट :– सभी **बारह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 12 × 3 = 36)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **12** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 12 × 3 = 36)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **12** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) If $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$, find $\left|\frac{dr}{dt}\right|$.

यदि $\vec{r} = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$, तो $\left|\frac{dr}{dt}\right|$ ज्ञात कीजिए।

(ii) Define Solenoidal Vector.

परिनालिकीय सदिश को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write Cartesian form of Line-Integral.

रेखा समाकल का कार्तीय रूप लिखिए।

(iv) State Green's Theorem.

ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।

(v) Find the co-ordinates of the centre of the following conic :

निम्नलिखित शांक्व के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

(vi) Find distance between two points in polar co-ordinates.

ध्रुवीय निर्देशांकों में दो बिन्दुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

(vii) Write diameter form of the equation of a sphere.

व्यास रूप में गोले का समीकरण लिखिए।

(viii) Define Reciprocal cone.

व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।

(ix) Define Right circular cylinder.

लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए।

(x) Define central conicoid and write standard equation of central conicoid.

केन्द्रीय शांक्वज को परिभाषित कीजिए तथा उसका मानक समीकरण लिखिए।

(xi) Write the equations of the normal at the point (x_1, y_1, z_1) to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के बिन्दु (x_1, y_1, z_1) पर अभिलम्ब का समीकरण लिखिए।

(xii) Write the standard equation of elliptic paraboloid.

दीर्घवृत्तीय परवलय का मानक समीकरण लिखिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Find the direction and magnitude of maximum directional derivative of $f = x^2yz^3$ at the point (2, 1, –1).

बिन्दु (2, 1, –1) पर फलन $f = x^2yz^3$ के अधिकतम दिक् अवकलज की दिशा एवं परिणाम ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Prove that the following vector is irrotational :

सिद्ध कीजिए कि निम्न सदिश अघूर्णीय सदिश है :

$$f=(\sin y+z)\hat{i}+(x\cos y-z)\hat{j}+(x-y)\hat{k}$$

3. Find the total work done in moving a particle in a force field given by $F=3xy\hat{i}-5z\hat{j}+10\hat{k}$ along the curve $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ from $t = 1$ to $t = 2$.

एक बल $F=3xy\hat{i}-5z\hat{j}+10\hat{k}$ के क्षेत्र में एक कण को वक्र $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ के अनुदिश $t = 1$ से z तक ले जाने में किया गया कुल कार्य ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Use Gauss's divergence theorem to show that :

$$\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = 4\pi a^3$$

where the surface S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

गॉस प्रमेय की सहायता से प्रदर्शित कीजिए :

$$\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = 4\pi a^3$$

जहाँ सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है।

4. Find the asymptotes of the following hyperbola :

$$x^2 + 24xy - 6y^2 + 28x + 36y + 16 = 0$$

निम्न अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + 24xy - 6y^2 + 28x + 36y + 16 = 0$$

Or

(अथवा)

PSP′ is a focal chord of the conic. Prove that the tangent at P and P′ intersect on the directix.

PSP′ किसी शांक्व की नाभीय जीवा है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P तथा P′ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ नियता पर काटती हैं।

5. Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touches the plane $4x + 3y = 15$.

उन गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाते हैं तथा समतल $4x + 3y = 15$ को स्पर्श करते हैं।

Or

(अथवा)

Find the equation of the cone whose vertex is the point (1, 1, 0) and guiding curve is $y = 0$, $x^2 + z^2 = 4$.

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (1, 1, 0) है तथा निर्देश वक्र $y = 0$, $x^2 + z^2 = 4$ है।

6. Prove that the locus of the foot of the perpendicular drawn from the centre of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ to any of its tangent plane is :

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के स्पर्श तल पर केन्द्र से लम्ब डाला गया है। सिद्ध कीजिए कि लम्ब के पाद का बिन्दु पथ है :

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Or

(अथवा)

Planes are drawn through a fixed point (α, β, γ), so that their sections of the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$ are rectangular hyperbolas. Prove that they touch the following cone :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b}+\frac{(y-\beta)^2}{a}+\frac{(z-\gamma)^2}{a+b}=0$$

एक स्थिर बिन्दु (α, β, γ) से खींचे समतलों द्वारा परवलयज $ax^2 + by^2 = 2z$ के परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय हैं; तो सिद्ध कीजिए कि वे निम्न शंकु को स्पर्श करते हैं :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b}+\frac{(y-\beta)^2}{a}+\frac{(z-\gamma)^2}{a+b}=0$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. (a) Find the angle between the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at the point $(2, -1, 2)$.

सतहों $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ और $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच का कोण बिन्दु $(2, -1, 2)$ पर ज्ञात कीजिए।

(b) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$; prove that :

$$\text{div}\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 f(r)\}$$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $r = |\vec{r}|$; तो सिद्ध कीजिए :

$$\text{div}\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 f(r)\}$$

8. (a) Evaluate :

$$\int_S (y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + z^2y^2\hat{k})\cdot\hat{n}\,dS$$

where S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the xy-plane.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_S (y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + z^2y^2\hat{k})\cdot\hat{n}\,dS$$

जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का वह पृष्ठ है जो xy-समतल के ऊपर है।

(b) Evaluate :

$$\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$$

where C is the region bounded by the parabolas $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$. Also verify Green's theorem.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$$

जहाँ C परवलय $y = \sqrt{x}$ तथा $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र है। ग्रीन प्रमेय का सत्यापन भी कीजिए।

9. Find the nature of the conic represented by the equation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ and trace it also.

समीकरण $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शांक्व की प्रकृति ज्ञात कीजिए एवं इसका अनुरेखण भी कीजिए।

10. (a) A sphere whose centre lies in the positive octant, passes through the origin and cuts the plane $x = y = z = 0$ in circles of radii $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ and $c\sqrt{2}$ respectively. Find its equation.

एक गोले का केन्द्र घन अष्टांशक में है और वह मूल बिन्दु से गुजरता है। निर्देशी समतल $x = y = z = 0$ से इसका प्रतिच्छेद क्रमशः $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ तथा $c\sqrt{2}$ त्रिज्या वाले वृत्त हैं। इस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$.

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$ है।

11. (a) Prove that the locus of the poles of the plane $lx + my + nz = p$ w.r. to the system of conicoid :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

where λ is the parameter, is a straight line perpendicular to the given plane.

सिद्ध कीजिए कि शांक्वज :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

जहाँ λ प्राचल है, के सापेक्ष समतल $lx + my + nz = p$ के ध्रुव का बिन्दु पथ दिये समतल के लम्बवत् एक सरल रेखा होती है।

(b) The sections of an enveloping cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ by the plane $z = 0$ is a parabola. Show that the locus of the vertices of the cone is $z = \pm c$.

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के अन्वालोपी शंकु का समतल $z = 0$ से परिच्छेद परवलय है। प्रदर्शित कीजिये कि शंकु के शीर्षों का बिन्दुपथ $z = \pm c$ है।